UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 5

(Themen der Woche 5: Banachraum; Hilbertraum; unbestimmtes Integral; bestimmtes Integral; Treppenfunktion; Regelfunktion).

1. Auf der Menge $\mathcal{C}([4,9])$ aller auf dem abgeschlossenen Intervall $[4,9]$ stetigen reellwertigen Funktionen sei die Funktion $(\cdot,\cdot) : \mathcal{C}([4,9]) \times \mathcal{C}([4,9]) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(f,g) := \int_4^9 f(x)g(x)\,dx, \text{ für alle } f,g \in \mathcal{C}([4,9]).$$

   (a) Zeigen Sie, dass durch die Funktion $(\cdot,\cdot)$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{C}([4,9])$ gegeben ist. **[4]**

   (b) Finden Sie heraus ob $\big(\mathcal{C}([4,9]), \|\cdot\|_{(\cdot,\cdot)}\big)$ ein Hilbertraum ist, wobei $\|\cdot\|_{(\cdot,\cdot)}$ die durch $(\cdot,\cdot)$ induzierte Norm bezeichnet. **[6]**

2. Benutzen Sie die *Substitutionsregel*, die *partielle Integration* und/oder die *Tabelle der Grundintegrale* und bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

   (i) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}\,dx$ **[3]** (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-e^{2x}}}\,dx$ **[3]**

   (iii) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$ **[3]** (iv) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$ **[3]**

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mittels *partieller Integration* und/oder *Substitution.*

   (i) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{ax}\,dx$ (für $a \in \mathbb{R}$) **[4]** (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/10} e^{-x}\cos(5x)\,dx$ **[4]**

4. Für $n \in \mathbb{N}$, sei die Treppenfunktion $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \lfloor n \cdot x \rfloor$$

   wobei $\lfloor y \rfloor$ die grösste ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich $y \in \mathbb{R}$ ist, das heisst $\lfloor y \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le y\}$. (*Historische Anmerkung:* Die hier verwendete Klammer $\lfloor \cdot \rfloor$ wird auch *Gauß-Klammer* genannt.)

   (a) Berechnen Sie das bestimmte Integral (in Abhängigkeit von n) $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$ **[4]**

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. bestimmen Sie $f(x)$ für alle $x \in [0,1]$, wobei $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$. **[3]**

   (c) Verwenden Sie das Ergebnis in (b) und berechnen Sie das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ des Grenzwertes $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ der Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **[3]**

5. (a) Beweisen Sie, dass jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ eine Regelfunktion ist. **[6]**

   (b) Finden Sie heraus (mit Begründung!), ob die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist, wobei f für alle $x \in [0,1]$ gegeben ist durch **[4]**

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & \text{für } x \neq 0 \text{ und } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p,q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$