UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 4

(Themen der Woche 4: Konvergenz und Stetigkeit in normierten Räumen; Banachraum; Hilbertraum; Banachscher Fixpunktsatz).

1. Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Betrachten Sie dann die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Vektoren $u_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,k})$ im $\mathbb{R}^k$, sowie den Vektor $u = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, dass in dieser Situation die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind: **[8]**

   (i) Für n gegen Unendlich, konvergiert die Folge (u_n) gegen den Vektor u hinsichtlich der Maximums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^k$.

   (ii) Für alle $m = 1, 2, \ldots, k$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n,m} = x_m$.

2. Zeigen Sie, dass $(\ell_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum ist. (Sie können dabei verwenden, dass $(\ell_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ein normierter Vektorraum ist). **[8]**

3. Der Raum $\ell_1(\mathbb{C})$ sei gegeben durch $\ell_1(\mathbb{C}) := \{(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ und die Menge $L(\mathbb{C})$ sei definiert durch

   $$L(\mathbb{C}) := \{(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1(\mathbb{C}) : \text{es existiert ein } N \in \mathbb{N}\text{, sodass } x_n = 0\text{, für alle } n \geq N\}.$$

   In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $(\ell_1(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ ein normierter Vektorraum ist, wobei $\|\cdot\|_1$ die 1-Norm bezeichnet, die gegeben ist durch $\|(x_1, x_2, x_3, \ldots)\|_1 := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$.
   Zeigen Sie, dass die Menge $L(\mathbb{C})$ *nicht* abgeschlossen in $(\ell_1(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1)$ ist. **[11]**

4. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren $v_n = (y_{n,1}, y_{n,2}, ...) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ und sei $v = (y_1, y_2, ...)$ ein Vektor in $\ell_\infty(\mathbb{R})$. Die *Supremums-Norm* eines Vektors $w = (z_1, z_2, ...) \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ ist definiert durch $\|w\|_\infty := \sup\{|z_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Betrachten Sie dann die beiden folgenden Aussagen:

   (A1) Für n gegen Unendlich, konvergiert die Folge (v_n) gegen den Vektor v hinsichtlich der Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\ell_\infty(\mathbb{R})$.

   (A2) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n,m} = y_m$.

   (i) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Aussage in (A1) die Aussage in (A2) impliziert. **[5]**

   (ii) Zeigen Sie oder widerlegen Sie, dass die Aussage in (A2) die Aussage in (A1) impliziert. **[7]**

5. Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage (dabei können Sie den in der Vorlesung behandelten Banachschen Fixpunktsatz als bekannt voraussetzen):

   Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben, $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\Phi : X \to X$ eine Abbildung deren k-fache Iteration $\Phi^k = \Phi^{k-1} \circ \Phi = \Phi^{k-2} \circ \Phi \circ \Phi = \Phi \circ \Phi \circ \ldots \circ \Phi$ eine Lipschitz-Abbildung mit einer Lipschitz-Konstanten $0 < c < 1$ ist, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt

   $$\|\Phi^k(x) - \Phi^k(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$$

   In dieser Situation besitzt Φ genau einen Fixpunkt.

   [11]