UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 3

(Themen der Woche 3: Taylorentwicklung; Vektorräume; normierte Räume).

1. Die Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch $\psi(x) := \exp(\cos(x))$.

   (a) Berechnen Sie das 2-te Taylor-Polynom $T_2(\psi; 0)(x)$ der Funktion ψ. **[5]**

   (b) Bestimmen Sie eine Konstante $K > 0$ derart, dass gilt **[5]**

   $$|\psi(x) - T_2(\psi; 0)(x)| \le K \cdot |x|^3, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

2. (a) Zeigen Sie, dass der Raum $M_{2,2}(\mathbb{C})$ aller (2×2)-Matrizen mit komplexen Eingängen ein Vektorraum ist unter der üblichen Addition von Matrizen und der üblichen Multiplikation von Matrizen mit skalaren Elementen aus $\mathbb{C}$. **[5]**

   (b) Sei $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist stetig auf } [0,1]\}$ die Menge aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Die *Summe* $f + g$ zweier Elemente f und g aus $\mathcal{C}([0,1])$ sei definiert durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, für alle $x \in [0,1]$. Ferner sei die *skalare Multiplikation* $\lambda \cdot f$ eines Elementes $f \in \mathcal{C}([0,1])$ mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert durch $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, für alle $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass der Raum $\mathcal{C}([0,1])$ mit diesen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. **[5]**

3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass **[10]**

   $$\Big| \|x-y\| - \|u-v\| \Big| \le \|x-u\| + \|y-v\|, \text{ für alle } x, y, u, v \in X$$

4. (a) Zeigen Sie, dass die Folge $((\ell_p, \|\cdot\|_p))_{p \in \mathbb{N}}$ eine streng aufsteigende Folge von normierten Vektorräumen ist, d.h. zeigen Sie, dass **[6]**

   $$\ell_p \subset \ell_q, \text{ für alle } p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } p < q$$

   (b) Verwenden Sie das Resultat in (a) um zu zeigen, dass **[4]**

   $$\ell_p \subset \ell_\infty, \text{ für alle } p \in \mathbb{N}$$

5. Das *geometrische Mittel* $G(x_1, ..., x_n)$ und das *arithmetische Mittel* $A(x_1, ..., x_n)$ von n positiven reellen Zahlen $x_1, ..., x_n$ ist gegeben durch

   $$G(x_1, ..., x_n) := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad \text{und} \quad A(x_1, ..., x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

   Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, ..., x_n$ gilt, dass

   $$G(x_1, ..., , x_n) \le A(x_1, ..., x_n)$$

   (*Hinweis:* Beweis per Induktion und die Young Ungleichung könnten hier hilfreich sein). **[10]**