UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 2

(Themen der Woche 2: Reihen differenzierbarer Funktionen; normal konvergente Funktionenreihen; Taylorentwicklung).

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $\phi_n : \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi_n(x) := \frac{1}{n(x-n)}, \text{ für alle } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

   Zeigen Sie, dass die folgende Aussage gültig ist:

$$\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \text{ ist normal konvergent auf } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

[10]

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $g, h : I \to \mathbb{R}$ zwei in I n-mal differenzierbare Funktionen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet. Verwenden Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und beweisen Sie die folgende *Leibnizsche Formel:*

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\,(g(x)h(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x), \text{ für alle } x \in I,$$

   wobei $f^{(n)}$, wie in Aufgabe 2 auf Aufgabenblatt 1, die n*-te Ableitung* einer Funktion f und $\frac{d^n}{d\,x^n}\,(g(x)h(x))$ die n-te Ableitung des Produktes der Funktionen g und h an der Stelle x bezeichnet. **[10]**

3. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der trigonometrischen Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$. **[10]**

4. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$, wobei f_s für festes $s \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f_s(x) := x^s$.
[10]

5. (a) Bestimmen Sie das 2-te Taylor-Polynom $T_2(\varphi, x_0)(x)$ und das 2-te Restglied $R_2(\varphi, x_0)(x)$ der Funktion φ an der Stelle $x_0 = 9$, wobei $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\varphi(x) := \sqrt{x}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

   (Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}_{\geq 0}$ die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen). **[8]**

   (b) Verwenden Sie das Ergebnis in (a) und berechnen Sie $T_2(\varphi, 9)(11)$. Vergleichen Sie das so erhaltenen Ergebnis mit dem was Ihr Taschenrechner für $\sqrt{11}$ angibt. **[2]**