UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 12

(Themen der Woche 12: Lösungen von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung; Existenz- und Eindeutigkeitssätze).

1. Berechnen Sie die Lösungen der beiden folgenden Anfangwertprobleme.
   (a) $y'(x)\sqrt{x} - \sqrt{y} = x\sqrt{y}$, wobei $y(9) = 4$ **[4]**
   (b) $y'(x)e^x - \dfrac{1}{\sin x} = 0$, wobei $y(0) = 0$ **[4]**

2. Bestimmen Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung **[8]**

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$$

3. Bestimmen Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung **[10]**

$$y''(x) + 3y'(x) - 6y(x) = xe^{-x}$$

4. Berechnen Sie die reelle Lösung des folgenden Anfangwertproblems. **[12]**

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = -5\sin(2x), \text{ wobei } y(0) = 1 \text{ und } y'(0) = 0$$

5. (a) Zeigen Sie, dass sich die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, (\text{für } x > 0)$$

   durch den Ansatz $z = y\sqrt{x}$ in eine Differentialgleichung 2. Ordnung, in der ausschliesslich z und z'' vorkommen, umformen lässt. **[5]**

   (b) Verwenden Sie das Ergebnis in (a) und bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung **[7]**

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, (\text{für } x > 0)$$

(*Anmerkung:* Die hierbei betrachtete Differentialgleichung ist ein Spezialfall der sogenannten *Besselschen Differentialgleichung*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0, (\text{für } p \in \mathbb{R} \text{ fest und } x > 0),$$

die unter anderem in der mathematischen Physik von Bedeutung ist (z.B. bei Untersuchungen von Eigenschwingungen kreisförmiger Membranen oder Orgelpfeifen, Ausbreitung von Wasserwellen in runden Behältern, Wärmeleitung in Metallstäben, oder bei der Analyse des Frequenzspektrums von Signalen)).