UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 10

(Themen der Woche 10: Taylor-Entwicklung; Satz über implizite Funktionen; Anfänge der Theorie der Differentialgleichungen).

1. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f((x,y)) := e^{x^2+y^2} - 8x^2 - 4y^4, \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von f um den Nullpunkt bis zu den Gliedern der Ordnung 6. **[12]**

2. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^{\sin(xy)} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

   in einer Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nach y aufgelöst werden kann. **[5]**
   Untersuchen Sie dann, ob das Gleiche auch für x gilt, d.h. ob diese Gleichung in einer Umgebung von $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ auch nach x aufgelöst werden kann. **[5]**

3. Sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F((x,y)) := y^5 + (x^2+1)y + x^3 - 4, \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Untersuchen Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen $y = g(x)$ der Gleichung $F((x,y)) = 0$. **[5]**

   (b) Berechnen Sie die Ableitung der Lösung $y = g(x)$ der Gleichung $F((x,y)) = 0$ aus Teil (a) dieser Aufgabe. **[5]**

4. Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen $y = y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen.

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = e^y \cos x$, wobei $y(1) = 0$. **[5]**

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$, wobei $y(0) = 1$. **[5]**

5. Welche der folgenden Aussagen sind richtig und welche falsch? Geben Sie kurze Begründungen Ihrer Antworten.

   (a) Jedes absolut konvergente uneigentliche Integral ist konvergent. **[2]**

   (b) Für die Operatornorm $\|T\|$ einer linearen, beschränkten Abbildung eines Banachraums $(X, \|\cdot\|_X)$ auf einen Banachraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ gilt **[2]**

$$\|T\| = \frac{1}{2} \cdot \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 2\}$$

   (c) Falls eine Funktion $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist, so ist H auch partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$. **[2]**

   (d) Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F((x,y)) := (x^4+y^2, y-x, x)$. Die Jacobi-Matrix $J_F((x,y))$ ist dann gegeben durch **[2]**

$$J_F((x,y)) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 2y \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$