UNIVERSITÄT BREMEN - SS 2013
- Übungen zur Vorlesung Analysis 2 -

Aufgabenblatt 1

(Themen der Woche 1: Differenzierbarkeit; L'Hospitalsche Regel; Folgen von Funktionen).

1. Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so dass die beiden Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existieren und endlich sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen gilt, dass
$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$$
[10]

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x \cdot e^{2x}$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$, bezeichne $f^{(n)}$ die n*-te Ableitung* der Funktion f, d.h. es sei $f^{(0)} := f$, $f^{(1)} := f'$ und $f^{(n+1)} := \left(f^{(n)}\right)'$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass
$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot (2x + n) \cdot e^{2x}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$
(*Hinweis:* Beweis per Induktion!) **[9]**

3. Benutzen Sie die Regel von L'Hospital um den folgenden Grenzwert zu berechnen:
$$\lim_{x\to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$$
[7]

4. Benutzen Sie die Regel von L'Hospital um die folgenden Grenzwerte zu berechnen. Hierbei bezeichnet $\lim_{x\to 0^+}$ den Grenzwert von rechts, d.h. den Grenzwert hinsichtlich aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to 0} x_k = 0$ und $x_m > 0$, für alle $m \in \mathbb{N}$.
   (a) $\lim_{x\to 0^+} \left(x^2 \cdot \log \sqrt{\frac{1}{x}}\right)$ **[7]**
   (b) $\lim_{x\to 0^+} x^{\log(1+x)}$ **[7]**

5. Für alle $n \in \mathbb{N}$, sei $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte, dass sie auf $[a, b]$ punktweise gegen die Funktion g_0 konvergiert, wobei $g_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in [a, b]$ gegeben ist durch $g_0(x) := 0$, und dass
$$f_k(x) \geq f_{k+1}(x), \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ und für alle } x \in [a, b].$$
Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen die Funktion g_0 konvergiert. **[10]**