UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 00

(Dieses Aufgabenblatt ist *außer Konkurrenz*, d.h. Sie können hiermit über Weihnachten (hoffentlich) etwas Spaß haben und nebenbei Ihr Punktekonto etwas aufbessern; Abgabetermin für die Lösungen dieses Aufgabenblatts ist Mi. 16.01.2013).

Thema der Woche $10\frac{1}{2}$: $\mathbb{W}$eihnαchtεn^2 $\forall$

1. In einer Prüfung waren $\frac{1}{4}$ der Aufgaben schwierig und $\frac{1}{3}$ waren leicht. Die verbleibenden 10 Aufgaben waren mittelschwer. Wie viele Aufgaben gab es in der Prüfung? **[2]**

2. Die Treppe in die Hölle hat unendlich vielen Stufen und sie ist aus lauter Quadraten zusammengesetzt, die allesamt auf einer Geraden liegen. Die erste Stufe ist 24 m lang und die Länge jeder dann folgenden Stufe ist jeweils um den Faktor $\frac{1}{4}$ kleiner als die Länge der vorhergehenden Stufe.

   (a) Wie lang (in der Horizontalen gemessen) ist der Weg in die Hölle? **[4]**

   (b) Wieviel Meter steigt man im Ganzen herab auf diesem Weg in die Hölle? **[2]**

   (c) Wie groß ist der Flächeninhalt aller Quadrate der Treppe? **[4]**

3. Ein Ball wird aus der Höhe h senkrecht zu Boden fallen gelassen. Der Ball springt vom Boden ab und erreicht bei jedem Absprung vom Boden, das α-fache der zuletzt erreichten Höhe, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha < 1$. Berechnen Sie abhängig von h und α den vom Ball zurückgelegten Gesamtweg. **[6]**

4. Einem Kreis mit Radius r wird ein Quadrat einbeschrieben (das ganz in dem Kreis liegt und diesen mit seinen Eckpunkten berührt), diesem Quadrat wieder ein Kreis (der ganz in dem Quadrat liegt und dieses an den vier Mittelpunkten der Seiten des Quadrates berührt), diesem Kreis wieder ein Quadrat (das ganz in dem Kreis liegt und diesen mit seinen Eckpunkten berührt), und diesem Quadrat wieder ein Kreis usw., das heisst man setze diesen Prozess unendlich oft fort.

   (a) Wie groß ist die Summe der Kreisflächen aller einbeschriebenen Kreise? **[6]**

   (b) Wie groß ist die Summe der Flächen aller einbeschriebenen Quadrate? **[6]**

5. Nachdem Sie die Mathe Klausur bestanden haben möchten Sie Mathe-Nachhilfe geben und weil sie der/die günstigste sein wollen, fangen Sie mit einem Stundensatz von 1 Euro pro Stunde an und verdoppeln anschließend bei jeder weiteren Stunde Ihren Stundensatz.

   (a) Nach wie vielen Stunden lohnt sich für Sie das Geschäft, wenn der ortsübliche Stundensatz im Durchschnitt bei 10 Euro pro Stunde liegt, d.h. nach wie vielen Stunden haben Sie mit der obigen Methode mehr verdient als Sie mit dem ortsüblichen Stundensatz verdient hätten? **[2]**

   (b) Wie viele Nachhilfestunden müssen Sie geben, bis Sie ihre erste Million verdient haben? **[3]**

bitte wenden

6. Betrachten Sie die folgende induktive Konstruktion des Herrn Wacław Sierpiński aus dem Jahre 1915:

   (i_1) Beginnen Sie mit einem gleichseitigen Dreieck $D_{1,1}$ der Seitenlänge 1.

   (i_2) Verbinden Sie dann die Mittelpunkte der Seiten von $D_{1,1}$ geradlinig. Hierdurch wird $D_{1,1}$ in vier deckungsgleiche Teildreiecke zerlegt.

   (i_3) Entfernen Sie das mittlere der vier Teildreiecke. Es bleiben drei gleichseitige Teildreiecke übrig, die mit $D_{2,1}, D_{2,2}$ und $D_{2,3}$ bezeichnet seien. Diese drei neuen Dreiecke repräsentieren den ersten Schritt der Konstruktion.

   (i_4) Wenden Sie die Schritte (i_2) und (i_3) auf jedes der drei übrig gebliebenen Teildreiecke $D_{2,1}, D_{2,2}$ und $D_{2,3}$ an. Dieses ergibt 9 gleichseitige Dreiecke $D_{3,1}, D_{3,2}, ..., D_{3,9}$. Diese neun neuen Dreiecke repräsentieren den zweiten Schritt der Konstruktion.

   (i_5) Im n-ten Schritt der Konstruktion startet man dann mit den im $(n-1)$-ten Schritt erhaltenen 3^{n-1} gleichseitigen Dreiecken $D_{n,1}, D_{n,2}, ..., D_{n,3^{n-1}}$. Auf jedes von diesen wendet man dann wieder die Schritte (i_2) und (i_3) an und erhält auf diese Weise 3^n neue Teildreiecke, die mit $D_{n+1,1}, D_{n+1,2}, ..., D_{n+1,3^n}$ bezeichnet seien.

   Sierpiński interessierte sich dafür, was bei dieser Konstruktion "übrig bleibt", d.h. er interessierte sich für die Menge $\mathcal{S}$ jener Punkte, die in unendlich vielen dieser Dreiecke liegen. Diese Menge bezeichnet man heute als das *Sierpiński-Dreieck* und sie ist gegeben durch

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{3^n} D_{n+1,k}$$

   (a) Geben Sie ein graphische Veranschaulichung der ersten vier Schritte der obigen Konstruktion der Menge $\mathcal{S}$. **[3]**

   (b) Bestimmen Sie die Seitenlänge s_n des Dreiecks $D_{n+1,k}$ in dieser Konstruktion, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{1, 2, ..., 3^n\}$, und berechnen Sie dann den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$. **[6]**

   (c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt F_n des Dreiecks $D_{n+1,k}$ in dieser Konstruktion, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{1, 2, ..., 3^n\}$, und berechnen Sie dann den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. **[6]**

   (d) ($*$) Berechnen Sie die Zahl $\delta \in \mathbb{R}$, die gegeben ist durch **[10]**

$$\delta := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \sum_{D \in \mathcal{D}} (\mathrm{diam}(D))^t \quad \text{ist eine konvergente Reihe} \right\},$$

   wobei $\mathcal{D} := \{D_{n+1,k} : n \in \mathbb{N}_0, k \in \{1, 2, ..., 3^n\}\}$ und wobei $\mathrm{diam}(A) := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ den *Durchmesser* einer Menge $A \subset \mathbb{R}^2$ bezeichnet. (**Hinweis:** *Hierbei ist es hilfreich zu bemerken, dass die Anzahl der in dem n-ten Schritt vorkommenden neuen Dreiecke gleich 3^n ist und dass der Durchmesser eines jeden im n-ten Schritt vorkommenden neuen Dreiecks gleich s_n ist).*

>> Frohe Weihnachten <<