UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 8

(Themen der Woche 8: Alternierende Reihen; Konvergenzkriterien für Reihen (mit komplexen Gliedern); absolute Konvergenz; Umordnungen von Reihen).

1. Sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ eine konvergente Reihe für die $x_k \geq 0$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

   Beweisen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ konvergiert. **[5]**

2. Bestimmen Sie die Werte der beiden folgenden unendlichen Reihen.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n - 4^{n+1}}{5^{n+2}}$ **[4]**

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)}$, für beliebiges festes $x > 0$ **[6]**

3. Beweisen Sie die folgende, für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$ gültige Formel: **[10]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}$$

   Hinweis: Betrachten Sie hierfür die für alle $k \in \mathbb{N}$ gültige Darstellung

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} na^n \;=\;& a^k + a^{k-1} + \ldots + a^3 + a^2 + a \\ +\;& a^k + a^{k-1} + \ldots + a^3 + a^2 \\ +\;& a^k + a^{k-1} + \ldots + a^3 \\ & \ldots \\ +\;& a^k\end{aligned}$$

   (*Historisches: Die Berechnung dieser Reihe geht auf Jakob Bernoulli (1654-1705) zurück.*)

4. Finden Sie heraus welche der folgenden Reihen konvergent, absolut konvergent oder divergent sind.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ **[3]**

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{(n+1)^2}{n^5+1}$ **[3]**

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{99\,n}{\sqrt{n}+1} \cdot \cos(n\pi)$ **[3]**

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+4^{-n}}{1+3^n} \cdot \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **[3]**

5. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die auf Aufgabenblatt 1 (Aufgabe 5) definierte *Fibonacci-Folge*. Bestimmen Sie den Wert der Reihe **[8]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n\, f_{n+2}}$$

6. Finden Sie heraus, welches Intervall durch die folgende Menge beschrieben wird: **[5]**

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n \text{ ist eine konvergente Reihe} \right\}$$