UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 6

(Themen der Woche 6:
Cauchy-Folgen; Vollständigkeit; Häufungspunkte; Satz von Bolzano Weierstraß).

1. Wie in Aufgabe 5 von Aufgabenblatt 5, seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume und für $M := M_1 \times M_2$ sei die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x, y) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \text{ für alle } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$$

   (a) Zeigen Sie, dass eine Folge $\left((x_{1,n}, x_{2,n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in (M, d) genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn die Folge $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (M_1, d_1) und die Folge $(x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (M_2, d_2) ist. **[7]**

   (b) Beweisen Sie, dass (M, d) genau dann vollständig ist, wenn die Räume (M_1, d_1) und (M_2, d_2) beide vollständig sind. **[2]**

2. Bestimmen Sie die Menge der Häufungspunkte für jede der folgenden zwei Folgen.

   (a) $\left(5 + (-1)^{3n} \cdot \sqrt[n]{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **[4]** (b) $\left(e^{\frac{n\pi}{2} i} + 2^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **[4]**

3. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen reeller Zahlen für die höchstens endlich viele Folgenglieder von Null verschieden sind, d.h.

$$\mathcal{F} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ und } \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ so dass } x_i = 0\ \forall i \geq N\},$$

   und es sei die Abbildung $\rho : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ gegeben durch, für beliebige $(x_n), (y_n) \in \mathcal{F}$,

$$\rho((x_n), (y_n)) := \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass das Paar $(\mathcal{F}, \rho)$ ein metrischer Raum ist. **[4]**

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$x_n := \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, 0, 0, 0, ...\right),$$

   eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{F}, \rho)$ ist. **[8]**

   (c) Finden Sie heraus ob der Raum $(\mathcal{F}, \rho)$ vollständig ist. **[5]**
   (Das Ergebnis in (b) könnte hierbei nützlich sein).

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte (sofern diese existieren).

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{9n-4}{n+2}$ **[2]** (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{13}{9-7n}$ **[2]**

   (c) $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+2}\right)$ **[2]** (d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-n}\right)$ **[2]**

   (e) $\lim_{n\to\infty} \left((-1)^{n+1} \cdot \frac{n^4}{2^n}\right)$ **[2]** (f) $\lim_{n\to\infty} \left(4 + \sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right)$ **[2]**

   (g) $\lim_{n\to\infty} \left(\cos(\pi n) + \frac{4^{\frac{n}{2}} - n^2}{2^n - 1}\right)$ **[2]** (h) $\lim_{n\to\infty} \left(2^{n+1} \cdot \frac{1}{7 \cdot 2^n} + 1^n\right)$ **[2]**