UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 5

(Themen der Woche 5:
Komplexe Zahlen; metrische Räume; Folgen; Konvergenz; Grenzwert).

1. Zeichnen Sie die folgenden Punktmengen A_1 und A_2 in der komplexen Zahlenebene.

   (a) $A_1 := \{z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z - 2i| < 3\}$ **[2]**

   (b) $A_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ **[3]**

2. Berechnen Sie die folgenden reellen Zahlen.
   (a) $\mathrm{Im}((7 + 4i)^{-2})$ **[3]** (b) $\mathrm{Re}((3i + 2)^3)$ **[3]**

3. Bestimmen Sie das Argument $\arg(z)$ der komplexen Zahl $z := \frac{5-2i}{1+i}$. **[4]**

4. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Paare metrische Räume sind.

   (a) $(\mathbb{R}^3, d_M)$, wobei d_M die *Mannheimer Metrik für den* $\mathbb{R}^3$ bezeichnet, die gegeben ist, für alle $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, durch **[7]**

   $$d_M(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

   (b) $(\mathbb{R}^2, d_P)$, wobei d_P die *französische Eisenbahnmetrik für den* $\mathbb{R}^2$ *bezüglich des festen Punktes* $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet, die gegeben ist, für alle $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, durch **[7]**

   $$d_P(x, y) := \begin{cases} d(x, P) + d(y, P) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

   Hierbei bezeichnet d die Standardmetrik im $\mathbb{R}^2$, die gegeben ist, für alle $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, durch

   $$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}$$

5. Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume und für das kartesische Produkt $M := M_1 \times M_2$ sei die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$d(x, y) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \text{ für alle } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$$

   (a) Zeigen Sie, dass (M, d) ein metrischer Raum ist. **[6]**

   (b) Beweisen Sie, dass eine Folge $(x_{1,n}, x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in (M, d) genau dann konvergiert wenn der Grenzwert der Folge $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in (M_1, d_1) und der Grenzwert der Folge $(x_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ in (M_2, d_2) existieren. **[8]**

6. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) heisst *Cauchy-Folge* genau dann wenn

   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass für alle } n, k \geq N \text{ gilt } d(x_n, x_k) < \epsilon$$

   Geben Sie einen Beweis für die folgende Aussage.

   In einem metrischen Raum ist jede Cauchy-Folge eine beschränkte Folge. **[7]**