UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 4

(Themen der Woche 4: Intervallschachtelung; Mächtigkeit von Mengen; komplexe Zahlen).

1. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung $\{I_i : i \in \mathbb{N}\}$ gibt derart, dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt, dass die Randpunkte des Intervalls I_i Elemente aus $\mathbb{Q}$ sind. **[6]**

2. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind.
   (a) Die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen. **[2]**
   (b) Die Menge $2 \cdot \mathbb{N}$ aller geraden natürlichen Zahlen. **[2]**
   (c) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 \in \mathbb{N}\}$ aller Quadratwurzeln natürlicher Zahlen. **[5]**

3. Finden Sie heraus, ob die folgende Menge $\mathcal{E}$ abzählbar oder überabzählbar ist:
$$\mathcal{E} := \{E \subset \mathbb{N} : \text{entweder } E \text{ ist endlich oder } \mathbb{N} \setminus E \text{ ist endlich}\}$$
[8]

4. (a) Beweisen Sie, dass das beidseitig offene Einheitsintervall $(0,1)$ und die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ gleichmächtig sind. **[4]**
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ und die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \mathbb{N}$ gleichmächtig sind. **[8]**

5. (a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$, dar.
      i. $(1-2i) + 2i(i-5)$ **[1]**
      ii. $(5+i)^3$ **[1]**
      iii. $\dfrac{7+i}{7-i} + \dfrac{1-i}{2+i}$ **[2]**
      iv. $|(1-i)(1+2i)|$ **[2]**
      v. $\overline{(2-2i)(1-2i)}$ **[2]**
   (b) i. Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt **[2]**
$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) \cdot (1-z) = 1 - z^n$$
      ii. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right) = 0$$
      (*Hinweis:* Das Ergebnis in 5.(b) i. könnte hier nützlich sein.) **[5]**