# UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
# - Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

**Aufgabenblatt 3**

(Themen der Woche 3:
die reellen Zahlen; Vollständigkeit; Infimum; Supremum; Minimum; Maximum).

1. Bestimmen Sie das Infimum und das Supremum der folgenden Mengen und geben Sie gegebenenfalls das Minimum oder das Maximum dieser Mengen an.

   (a) $A_1 := \left\{ \dfrac{a}{1+3a} : a > -\dfrac{1}{3} \right\}$ **[5]**

   (b) $A_2 := \left\{ \dfrac{|b|}{1+|b|} : b \in \mathbb{R} \right\}$ **[5]**

   (c) $A_3 := \left\{ 3^{-k} + m^{-2} : k, m \in \mathbb{N} \right\}$ **[6]**

2. Geben Sie einen Beweis dafür, dass jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen ein Infimum besitzt. **[10]**

3. (a) Es seien $A$ und $B$ zwei nicht-leere, nach unten und oben beschränkte Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

   i. Finden Sie heraus, welche der beiden Aussagen richtig ist und beweisen Sie diese dann: **[5]**

   $$\inf(A) \leq \inf(A \cup B) \qquad \text{oder} \qquad \inf(A \cup B) \leq \inf(A)$$

   ii. Finden Sie heraus, welche der beiden Aussagen richtig ist und beweisen Sie diese dann: **[5]**

   $$\sup(A) \leq \sup(A \cup B) \qquad \text{oder} \qquad \sup(A \cup B) \leq \sup(A)$$

   (b) In der Vorlesung wurde das Infimum und das Supremum für nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert. Benutzen Sie die Ergebnisse in 3 (a) i. und 3 (a) ii. um zu sinnvollen Definitionen des *Infimums der leeren Menge* und des *Supremums der leeren Menge* zu kommen. **[4]**

4. Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sei die Funktion $f_{a,b,c,d} : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$f_{a,b,c,d}(x) := \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass die folgenden Implikationen gültig sind.

   (a) Wenn $ad - bc \neq 0$, dann gilt für alle irrationalen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, dass

   i. $cx + d \neq 0$; **[2]**

   ii. $f_{a,b,c,d}(x)$ ist eine irrationale Zahl. **[5]**

   (b) Wenn $ad - bc = 0$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$, dass $f_{a,b,c,d}(x)$ eine rationale Zahl ist. **[3]**