UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 2

(Themen der Woche 2: Beweismethoden; Körperaxiome.)

1. Geben Sie einen Beweis durch vollständige Induktion dafür, dass für jede positive ganze Zahl n gilt, dass 5 ein Teiler von $7^n - 2^n$ ist. **[8]**

2. (a) Geben Sie einen deduktiven Beweis dafür, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die folgende Implikation gültig ist. **[3]**

$$x^4 + x^2 + 6x - 24 < 0 \Longrightarrow x \leq 6.$$

   (b) Beweisen Sie die Implikation in (a) mittels Widerspruchsbeweis. **[3]**

   (c) Geben Sie ein Gegenbeispiel für die folgende Implikation. **[3]**

$$x \leq 6 \Longrightarrow x^4 + x^2 + 6x - 24 < 0.$$

3. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage für alle $a \in \mathbb{N}$ erfüllt ist.

   Wenn a^2 durch 5 teilbar ist, dann ist a durch 5 teilbar.

   (Hinweis: a *nicht teilbar durch* 5 bedeutet, dass $a = 5k + l$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $l \in \{1, 2, 3, 4\}$). **[8]**

4. Finden Sie heraus, welche der folgenden Aussagen für reelle Zahlen y, r, m allgemein gültig ist bzw. im Allgemeinen falsch ist. Beweisen Sie die allgemeingültigen Aussagen und für die übrigen Aussagen geben Sie ein Gegenbeispiel.

   (a) $|y - r| < m \Longrightarrow y > r - 2m$ **[3]**

   (b) $r\,m > 1$ und $r < 1 \Longrightarrow m > 1$ **[3]**

   (c) $y(y - 2r^2) > 0 \Longleftrightarrow |y - r^2| > r^2$ **[3]**

5. Zeigen Sie. dass für alle reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2} \quad \text{und} \quad \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

   Hierbei bezeichnet $\min(a, b)$ die kleinere und $\max(a, b)$ die größere der beiden Zahlen a und b, falls $a \neq b$, und falls $a = b$, so sind $\min(a, b)$ und $\max(a, b)$ definiert durch $\min(a, b) := \max(a, b) := a = b$. **[6]**

6. Die Menge $\mathcal{M}$ sei gegeben durch

$$\mathcal{M} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \text{ und } y \text{ sind rationale Zahlen}\}.$$

   In $\mathcal{M}$ sei die Addition $\oplus$ und die Multiplikation $\odot$ für alle $(x, y), (r, s) \in \mathcal{M}$ gegeben durch

$$(x, y) \oplus (r, s) := (x + r, y + s) \text{ und } (x, y) \odot (r, s) := (xr - 2ys, xs + yr).$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ bezüglich der beiden Operationen $\oplus$ und $\odot$ abgeschlossen ist. **[2]**

   (b) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}, \oplus, \odot)$ ein Körper ist. **[8]**