UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 1.

Themen der Woche 1: Beweis durch vollständige Induktion; Widerspruchsbeweis.

1. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ **[5]**

   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ **[5]**

   (c) Verwenden Sie die Identität in (b) und zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **[1]**

   $$n^2(n+1)^2 \text{ ist durch 4 teilbar}$$

2. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt: **[7]**

   $$2^n \geq n^2$$

3. Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: **[7]**

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

4. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt: **[7]**

   $$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

   (*Anmerkung:* Diese Ungleichung wird auch *Bernoulli Ungleichung* genannt).

5. Es bezeichne $(f_0, f_1, f_2, \cdots)$ die *Fibonacci-Folge*, die gegeben ist durch

   $$\begin{aligned} f_0 &:= 0, \\ f_1 &:= 1, \\ f_{n+1} &:= f_{n-1} + f_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

   (a) Bestimmen Sie die ersten 15 Elemente $f_0, f_1, \ldots, f_{14}$ der Fibonacci-Folge. **[1]**

   (b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **[5]**

   $$f_{n+1} \leq 2^{n-1}$$

   (c) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: **[5]**

   $$f_0 + f_1 + \cdots + f_n \leq 2^{n-1}$$

   (*Hinweis:* Die Aussagen in Aufgabe 1 (a) und 5 (b) könnten hier hilfreich sein).

6. Es ist bekannt, dass wenn das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl n durch 5 teilbar ist, dann ist auch n durch 5 teilbar. Verwenden Sie diese Tatsache und geben Sie einen Widerspruchsbeweis für die Tatsache, dass $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist. **[7]**