UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13
- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 12

(Themen der Woche 12: Zwischenwertsatz; Fixpunktsatz; topologische Grundbegriffe; gleichmäßige Stetigkeit; Differenzierbarkeit).

1. Verwenden Sie den Zwischenwertsatz, um den folgenden sogenannten *Nullstellensatz* zu beweisen:

   Wechselt eine in einem Intervall I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ in I ihr Vorzeichen, so besitzt f mindestens eine Nullstelle in I, d.h. $\exists\, x^* \in I$ so dass $f(x^*) = 0$.

   [8]

2. Es sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann die folgende Äquivalenz gültig ist:

   $$g \text{ ist injektiv} \iff g \text{ ist streng monoton}$$

   [10]

3. Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

   (a) Die Menge $\{\mathrm{Re}(z) : z \in K\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. **[3]**

   (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{z \in K : \mathrm{Re}(z) = x\}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. **[5]**

4. Zeigen Sie, dass wenn die Funktionen $\phi : D \to \mathbb{R}$ und $\psi : \phi(D) \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind (wobei D irgendeine Teilmenge aus $\mathbb{R}$ bezeichnet), dann ist auch die Komposition $\psi \circ \phi$ der beiden Funktionen gleichmäßig stetig in D. **[7]**

5. Für $\gamma > 1$, sei $F_\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine Funktion für die gilt $|F_\gamma(x)| \leq |x|^\gamma$, für alle $x \in (-1,1)$. Zeigen Sie, dass F_γ in 0 differenzierbar ist und dass $F'_\gamma(0) = 0$.

   [10]

6. Es sei $h : I \to \mathbb{R}$ eine auf einem abgeschlossenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion. Zeigen Sie, dass dann die folgende Implikation gültig ist:

   $$h \text{ ist nicht gleichmäßig stetig auf } I \implies h \text{ ist nicht differenzierbar auf } I$$

   [7]