

UNIVERSITÄT BREMEN - WS 2012/13

- Übungen zur Vorlesung Analysis 1 -

Aufgabenblatt 10

Abgabetermin: Mo. 14.01.2013

(Themen der Woche 10: Trigonometrische Funktionen; Stetigkeit).

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gültig sind.

$$(a) \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad [1]$$

$$(b) \operatorname{Im}(w) = \frac{w - \bar{w}}{2i} \quad [1]$$

2. Benutzen Sie die Definition von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ für komplexe Werte $z \in \mathbb{C}$ und zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gültig sind.

$$(a) (\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1 \quad [4]$$

$$(b) \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \quad [5]$$

$$(c) \cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \quad [5]$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung der Exponentialfunktion und der Definitionen der Hyperbelfunktionen $\sinh$ und $\cosh$, dass die folgenden Identitäten für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gültig sind.

$$(a) (\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1 \quad [4]$$

$$(b) \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad [5]$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe der *Eulerschen Formel*, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: [5]

$$\cos(3x) = 4(\cos(x))^3 - 3\cos(x)$$

5. (a) Die Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\psi(x) := 5x^2 + 6$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ψ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. [6]
(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$, sei die Funktion $\chi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\chi_{a,b}(x) := \begin{cases} \frac{a}{x-2} & \text{für } x \leq 0 \\ 2x - b & \text{für } 0 < x < 2 \\ 6 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Für welche Werte von a und b ist $\chi_{a,b}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig? [6]

6. Eine Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R}$* , falls es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|h(x) - h(y)| \leq c \cdot |x - y|$$

- (a) Geben Sie ein Beispiel für eine auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetige Funktion. [1]

- (b) Zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: [7]

Ist $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion auf $\mathbb{R}$, dann ist h auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(*Historische Anmerkung:* Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 - 1903) war seit 1864 als Mathematikprofessor an der Universität Bonn tätig).