Untersuchung gewisser Mengen unter dem Aspekt der Baireschen Kategorie

Bachelorarbeit

Bremen, den 13.07.2011

Verfasser:	Malte Koch
Matrikelnummer:	2290215
geb. am:	21.12.1987
Universität:	Bremen
Studiengang:	Mathematik
Gutachter:	Dr. Michael Wolff

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In dieser Arbeit sollen gewisse Mengen unter dem Aspekt der Baireschen Kategorie untersucht werden. Wesentliche Themenschwerpunkte bilden Existenzbeweise und der Vergleich mit der Maßtheorie. Die Bairesche Kategorie ist in keinstem Sinne mit der Kategorientheorie als eigenständigem Zweig der Mathematik verwandt, sondern ist eine Klassifikation von Mengen in einem topologischen Raum. Der Begriff der Kategorie ist sehr abstrakt und entzieht sich jeder Vorstellung, es lassen sich zudem schwer Beispiele außerhalb der reellen Zahlen finden.
Zur Motivation sei folgende Beobachtung angeführt: Die rationalen Zahlen bilden eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen. Das Komplement, die irrationalen Zahlen, bildet eine dichte (das heißt sehr große) Teilmenge.
Die Frage ist nun, ob sich der Schluss, dass Komplemente abzählbarer Mengen dicht sind, auf metrische Räume verallgemeinern lässt. Eine Antwort hierauf gibt der Bairesche Kategoriensatz, der ähnliches in der Sprache der Kategorie aussagt. Jener Satz ist ein wichtiges Fundament in der Funktionalanalysis, soll in dieser Arbeit jedoch für Existenzbeweise genutzt werden. Ein wichtiges Resultat wird die Existenz nirgends differenzierbarer Funktionen sein.
Nach einem kurzen Ausflug in die Bairesche Klassifikation reeller Funktionen, sollen zum Abschluss dieser Arbeit Analogien bzw. Unterschiede zur Maßtheorie hergestellt werden.

Als ein Leitfaden für diese Bachelorarbeit diente das Buch *Maß und Kategorie* von J.C. Oxtoby, welches dem Leser sowohl zur Einführung als auch zur Vertiefung der Thematik ans Herz gelegt sei. Es wird als [Oxtoby, 1971] zitiert.
Falls Unklarheiten über Grundwissen aus der Topologie, Maßtheorie oder Funktionalanalysis bestehen, sei auf den Anhang verwiesen, zudem ist für diese Arbeit lediglich Vorwissen aus einer zweisemestrigen Analysisveranstaltung vorausgesetz. Die verwendeten, aber nicht bewiesenen Sätze sind zumeist in [Alt, 2006] oder [Elstrodt, 2010] zu finden.

2. Grundlegende Begriffe

Ausgangs- und Höhepunkt aller Betrachtungen dieser Arbeit ist die Eigenschaft einer Menge, in einem topologischen Raum dicht zu sein.

Definition 2.1 (Dicht)**.** *Sei (T, τ) ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $D \subset T$ heißt dicht in T :⇔*

$$\overline{D} = T \tag{1.1}$$

Intuitiv stellt man sich vor, dass jeder Punkt aus T in gewisser Weise *nah* an D liegt bzw. D berührt. Dies ergründet sich in der äquivalenten Forderung

Proposition 2.2. *Eine Teilmenge $D \subset T$ ist dicht in T ⇔*

$$\forall O \subset T \text{ offen}, \neq \emptyset : D \cap O \neq \emptyset \tag{1.2}$$

Eine dichte Menge trifft also jede offene Menge aus T. Das heißt, wenn man einen beliebigen Punkt aus T wählt, schneidet jede offene Umgebung die dichte Menge. Dies ist die topologische Bedeutung von *Nähe*.
Beweis: (1.1)⇒(1.2): Sei $O \subset T$ offen, $\neq \emptyset$ und $x \in O$, also insbesondere $x \in \overline{D}$.
Weil x im Abschluss von D ist, schneidet D jede Umgebung von x. Da O Umgebung von x ist, folgt also $D \cap O \neq \emptyset$.
(1.2)⇒(1.1): Zu zeigen ist $T \subset \overline{D}$. Sei also $x \in T$.
Nach Voraussetzung gilt $D \cap U \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von x. ⇒ $x \in \overline{D}$. □

Beispiele dichter Mengen:
(1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, denn in jeder Umgebung einer reellen Zahl findet man rationale Zahlen.
(2) Die Polynome im Raum der stetigen Funktionen auf kompaktem Intervall (nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz).

Definition 2.3 (Nirgends dicht)**.** *Eine Teilmenge H heißt nirgends dicht in T :⇔*

$$\overline{H}^{\circ} = \emptyset \tag{2.1}$$

Nirgends dicht bedeutet also, dass der Abschluss keine inneren Punkte hat. Insbesondere umfasst der Abschluss von H, also auch H, keine offenen Mengen, denn die größte offene Menge in $\overline{H}$ ist die leere Menge. Äquivalent zu (2.1) kann man eine dieser 2 Forderungen stellen:

Proposition 2.4. *Eine Teilmenge H ist nirgends dicht in T* $\Leftrightarrow$

$$\overline{H}^C \text{ ist dicht} \tag{2.2}$$
$$\Leftrightarrow \forall O \text{ offen}, \neq \emptyset\ \exists M \subset T \text{ offen}, \neq \emptyset : M \subset O \backslash H \tag{2.3}$$

Mit (2.3) ist gesichert, dass in jeder offenen Menge eine offene Teilmenge existiert, die leeren Schnitt mit H hat. Mit der Proposition zur Dichtheit wird nun klar, dass eine nirgends dichte Menge in keiner offenen Menge dicht sein kann.
Beweis: Per Ringschluss: (2.1)$\Rightarrow$(2.2): Offenbar: $\overline{H}^\circ = \emptyset \Rightarrow T = (\overline{H}^\circ)^C$. Also ist zu zeigen: $(\overline{H}^\circ)^C = \overline{(\overline{H}^C)}$.
Sei dazu $A \subset T$ irgendeine Teilmenge, zeige nun $(A^\circ)^C = \overline{(A^C)}$:

$$x \in (A^\circ)^C \Leftrightarrow x \notin A^\circ \Leftrightarrow x \in (\underbrace{\partial A}_{=\partial A^C} \cup A^C) = \overline{A^C}$$

(2.2)$\Rightarrow$(2.3): Sei $\overline{H}^C$ dicht in T und O eine nichtleere, offene Menge. Mit (1.2) folgt: $\overline{H}^C \cap O \neq \emptyset$. Setze also $M := \overline{H}^C \cap O$. Damit ist M als Schnitt offener Mengen offen, nicht leer, Teilmenge von O und nicht in H, da M schon nicht im Abschluss liegt.
(2.3)$\Rightarrow$(2.1): Angenommen $\overline{H}^\circ \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists O \text{ offen}, \neq \emptyset,\ O \subset \overline{H} \\ (2.3) &\Rightarrow \exists M \text{ offen}, \neq \emptyset :\ M \subset O \backslash H \\ &\Rightarrow M \subset \overline{H} \cap H^C \subset \partial H \end{aligned}$$

Das heißt, dass M aus Randpunkten von H besteht. Randpunkte sind jedoch keine inneren Punkte, da jede Umgebung in diesem Fall sowohl H als auch H^C schneidet. Dies steht offenbar im Widerspruch dazu, dass M offen ist, also gilt doch $\overline{H}^\circ = \emptyset$. $\square$

Beispiele nirgends dichter Mengen:
(1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, denn es lässt sich stets ein offenes Teilintervall finden, indem man als Randpunkte die umgebenden ganzen Zahlen wählt.
(2) Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, denn in jede offene Menge aus $\mathbb{R}^2$ kann man ein offenes Rechteck einbetten, welches die Gerade nicht trifft.
(3) Die Menge $\mathbb{N}^{-1} := \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$, denn $\overline{\mathbb{N}^{-1}}^\circ = (\mathbb{N}^{-1} \cup \{0\})^\circ = \emptyset$
(4) *Das Cantorsche Diskontinuum*[1]
Dieses Beispiel soll etwas ausführlicher untersucht werden, da es in einem späteren Abschnitt noch nützlich sein wird.
Das Cantorsche Diskontinuum erhält man, indem man aus dem Einheitsintervall schrittweise die offenen, mittleren Drittel entfernt.

[1] Konstruktion nach [Natanson, 1969, S.50-51].

Setze

$$C_0 := [0,1]$$
$$C_1 := C_0 \backslash]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$$
$$C_2 := C_1 \backslash (]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[)$$
etc.

Weil im n-ten Schritt 2^n Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$ übrigbleiben, ist die Länge der Mengen C_n stets $2^n \frac{1}{3^n}$. Das Cantorsche Diskontinuum ist nun definiert als die Menge

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Weil jedes C_n abgeschlossen ist, ist auch ihr Schnitt, also C, abgeschlossen. Nun sollen drei Eigenschaften des Cantorschen Diskontinuums gezeigt werden:

`C ist eine Lebesgue-Nullmenge`[2]: Diese Eigenschaft soll in Kapitel 5 ausgenutzt werden. Zu zeigen ist, dass $\lambda(C) = 0$ ist. Dazu betrachte man die im n-ten Schritt entfernten Intervalle. Diese haben zusammen eine Länge von $\frac{2^{n-1}}{3^n}$. Insgesamt wird also eine Menge des Maßes

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}/3^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1) = 1$$

entfernt. Als Komplement dieser entfernten Menge ist das Cantorsche Diskontinuum also eine Nullmenge.

`C ist nirgends dicht`: Wegen der Abgeschlossenheit bleibt zu zeigen $C^\circ = \emptyset$. Angenommen $C^\circ \neq \emptyset$, dann existiert eine nichtleere, offene Menge $O \subset C$, sodass $x \in O$ und $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset O$ für ein $\epsilon > 0$ gilt. Ein Teilintervall von C hat jedoch die Länge $\frac{1}{3^n}$, welche für n gegen Unendlich gegen Null strebt. Also kann man $n_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend groß wählen, sodass $\frac{1}{3^{n_0}} < 2\epsilon$ gilt. Damit ist aber $]x-\epsilon, x+\epsilon[\not\subset C_{n_0}$. Weil C Schnitt aller C_n ist, widerspricht dies $O \subset C$. Also enthält C doch keine offene Menge und ist somit nirgends dicht.

`C ist überabzählbar`: Dazu betrachte man die triadische Darstellung reeller Zahlen, das heißt die Darstellung zur Basis 3. Eine Zahl $x \in [0,1]$ ist dann der Form

$$x = (0, a_1 a_2 a_3 ...)_3, \quad a_k \in \{0,1,2\}$$

Zum Beispiel ist $(0,1120...)_3 = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + ...$

Im ersten Schritt, also der Entfernung von $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, verschwinden alle $x \in [0,1]$, für die $a_1 = 1$ notwendig ist, denn diese Zahlen sind der Form $\frac{1}{3} + ...$ Die Punkte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ lassen sich darstellen als $(0,0\overline{2})_3$ und $(0,2)_3$. Genauso werden auch im n-ten Schritt jene $x \in [0,1]$ entfernt, für die $a_n = 1$ ist. Somit verbleiben in C nur noch die $x \in [0,1]$, in deren triadischer Darstellung genau die Ziffern 0 und 2 vorkommen. Diese Menge

[2] zur Erläuterung siehe Anhang A.2.

ist überabzählbar, denn zu einer Folge solcher Zahlen lässt sich mit dem Cantorschen Diagonalargument eine weitere Zahl finden, die nicht in dieser Folge ist. $\square$

Das Cantorsche Diskontinuum ist also ein Beispiel für eine Menge, die sowohl überabzählbar als auch nirgends dicht ist.

Nun folgt noch eine Eigenschaft nirgends dichter Mengen:

Proposition 2.5. *Die Vereinigung zweier (und damit endlich vieler) nirgends dichter Mengen ist nirgends dicht.*

Beweis: Seien A_1, A_2 nirgends dicht. Zu zeigen: $\forall O$ offen, $\neq \emptyset$ $\exists M \subset T$ offen, $\neq \emptyset$: $M \subset O \backslash (A_1 \cup A_2)$. Sei dazu $O \subset T$ offen, $\neq \emptyset$.

$$A_1 \text{ nirgends dicht} \Rightarrow \exists M_1 \subset O \backslash A_1, M_1 \text{ offen}, \neq \emptyset$$
$$A_2 \text{ nirgends dicht} \Rightarrow \exists M_2 \subset M_1 \backslash A_2 \subset O \backslash (A_1 \cup A_2), M_2 \text{ offen}, \neq \emptyset$$

$\square$

Für unendliche Vereinigungen gilt dies nicht, was man an der Konstruktion der rationalen Zahlen sehen kann: Die Mengen $Q_n := \{\frac{z}{n} | z \in \mathbb{Z}\}$ sind alle nirgends dicht für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Vereinigung aller Q_n sind jedoch die rationalen Zahlen, welche sogar dicht in $\mathbb{R}$ liegen.

3. Bairesche Kategorien

In diesem Abschnitt wird die Mengenklassifikation nach Baire vorgestellt. Diese teilt alle Mengen bezüglich eines topologischen Raumes in zwei Klassen ein, wobei untersucht wird, ob sich eine Menge durch eine abzählbare Familie nirgends dichter Mengen approximieren lässt oder nicht. Diese Klassifizierung löst folgendes Paradoxon aus dem letzten Kapitel auf: Die rationalen Zahlen sind abzählbar und dicht, das Cantorsche Diskontinuum hingegen überabzählbar jedoch nirgends dicht. Dass eine *kleine* Menge dicht, eine *große* hingegen nirgends dicht sein kann, ist der Intuition zunächst zuwider. Die folgende Definition bietet hier aber eine Auflösung, indem sie die Begriffe *nirgends dicht* und *abzählbar* kombiniert:

Definition 3.1 (Menge erster Kategorie)**.** *Eine Menge $A \subset T$ ist von erster (Bairescher) Kategorie* $:\Leftrightarrow$

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} : A_n \text{ nirgends dicht } \forall n \in \mathbb{N}, \quad A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Erste Beispiele Mengen erster Kategorie sind die rationalen Zahlen sowie das Cantorsche Diskontinuum. Erstere ist eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter einpunktiger Mengen und zweitere ist selber nirgends dicht. Nirgends dichte Mengen sind selbstverständlich erster Kategorie, man braucht die weiteren Mengen nur gleich der leeren Menge zu setzen. Da, wie später ersichtlich sein wird, Mengen erster Kategorie als *klein* angesehen werden können, löst sich hiermit das angesprochene Paradoxon auf, die rationalen Zahlen sind nun *klein*, weil sie abzählbar sind, und das Cantorsche Diskontinuum ist *klein*, weil es nirgends dicht ist. Im Allgemeinen macht die Kategorie einer Menge jedoch keine Aussage darüber, ob jene Menge dicht ist.

Anmerkungen:
(1) Wie schon gezeigt wurde, müssen abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen nicht wieder nirgends dicht sein.
(2) Abzählbare Vereinigung von Mengen erster Kategorie sind wieder von erster Kategorie, denn die nirgends dichten Mengen, die man zum Überdecken benötigt, bleiben abzählbar.
(3) Teilmengen von Mengen erster Kategorie sind wieder erster Kategorie.

Lässt sich für eine Menge keine Überdeckung durch nirgends dichte Mengen finden, so ordnet man sie einer zweiten Klasse zu:

Definition 3.2 (Menge zweiter Kategorie)**.** *Eine Menge $A \subset T$ ist von zweiter Kategorie* $:\Leftrightarrow$ *A ist nicht von erster Kategorie, hat also keine Darstellung als Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Mengen.*

In diesem Sinne klassifiziert man alle Mengen eines topologischen Raumes. Die Kategorie einer Menge ist immer relativ zu diesem zu verstehen.
Die Sinnhaftigkeit dieser Klassifikation erschließt sich allerdings erst in vollständigen, metrischen Räumen oder in lokalkompakten Hausdorffräumen, wie im nächsten Abschnitt ersichtlich wird. Zunächst sollen noch einige Beispiele angegeben werden:
Weitere Beispiele:
(1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist von erster Kategorie, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ hingegen von zweiter Kategorie, womit ersichtlich wird, dass dichte Teilmengen sowohl erster als auch zweiter Kategorie sein können.
(2) Alle höchstens abzählbaren Teilmengen sind von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, denn einelementige Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nirgends dicht.

3.1. Der Kategoriensatz von Baire

Nun kann der Bairesche Kategoriensatz in der Sprache der Kategorien formuliert werden. Vorerst jedoch eine kleine Exkursion in die Funktionalanalysis:
Es lassen sich diverse Folgerungen aus dem Satz von Baire ziehen, welche auch ohne die Sprache der Kategorien auskommen und daher zum Beispiel in der Funktionalanalysis gebräuchlich sind[1].
Aufschluss gibt der Kategoriensatz in einem vollständigen Metrischen Raum darüber, dass bestimmte Mengen nicht nirgends dicht sind. Zur Motivation sei der folgende Satz angeführt:

Satz 3.3. *Sei $L : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen X, Y. Hat nun die Menge $A := \{x \in X : \ ||L(x)|| \leq n_0\}$ für ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$ ein nichtleeres Inneres, so ist L beschränkt.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass eine Zahl $C > 0$ existiert, sodass $||L(x)||_Y \leq C \cdot ||x||_X \ \forall x \in X$ gilt.
$A^\circ \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A$: $\{x : \ ||x - x_0|| < \epsilon\} \subset A$ für ein $\epsilon > 0$.
Sei zunächst $x \in X$ s.d. $||x|| < \epsilon$. Wegen $||x + x_0 - x_0|| = ||x|| < \epsilon$ ist $x + x_0 \in A$ also $||L(x + x_0)|| \leq n_0$ und damit gilt die Abschätzung

$$||L(x)|| \leq ||L(x + x_0)|| + ||L(x_0)|| \leq n_0 + ||L(x_0)||$$

Sei jetzt $x \in X$ beliebig, $x \neq 0$. Dann gilt

$$||L(x))|| = ||L(x\frac{2\epsilon||x||}{2\epsilon||x||})|| = \frac{\epsilon}{2}||L(\underbrace{\frac{\epsilon x}{2||x||}}_{||\cdot||=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon})|| \cdot ||x|| \leq \underbrace{\frac{\epsilon}{2}(n_0 + ||L(x_0)||)}_{:=C'<\infty}||x||$$

Wähle also $C := \max\{C', \ L(0)\}$ □

[1] vlg. z.B. [Alt, 2006, S.217].

Bei der Definition von nirgends dichten Mengen wurde gezeigt, dass das Komplement einer nirgends dichten Menge eine dichte Menge enthält. Das Hauptresultat dieser Arbeit zeigt, dass in vollständigen, metrischen Räumen weitaus mehr gilt:

Satz 3.4 (Bairescher Kategoriensatz)**.** *Sei (T,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:*

$$A \subset T \text{ von erster Kategorie } \Rightarrow T \backslash A \text{ ist dicht in T.}$$

Beweis[2]*:* Nach Voraussetzung existiert eine abzählbare Zerlegung von A in nirgends dichte Mengen A_n, $n \in \mathbb{N}$, sodass $A = \bigcup_{n \in N} A_n$. Zu zeigen ist, dass für jede offene Menge der Schnitt mit $T \backslash A$ nicht leer ist. Sei dazu U beliebige offene Umgebung für ein $u_0 \in T$.

$$\textbf{Ziel} : U \cap (T \backslash A) \neq \emptyset$$

Um ein Element aus diesem Schnitt zu finden, ist eine Folge $(U_n)_{n \in N}$ von nicht leeren, offenen Mengen, die in U, aber nicht in A liegen, vonnöten. Konstruiert werden die U_n durch vollständige Induktion:

`Induktionsanfang:` A_1 nirgends dicht $\Rightarrow U \not\subset \overline{A_1}$, denn $\overline{A_1}$ enthält keine offene Menge.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists u_1 \in U \backslash A_1, \ \exists \text{ offene Umgebung } U_1 \text{ von } u_1 \\ &\text{mit } \operatorname{diam}(U_1) < 1 \text{ s.d. } \overline{U_1} \subset U \backslash \ A_1 \end{aligned}$$

Dabei muss diam(U_1) so klein gewählt werden, dass auch der Abschluss von U_1 leeren Schnitt mit A_1 hat. (Weil A_1 nirgends dicht ex. $U_1' \subset U \backslash \ A_1$, dann hat U_1' eine offene Teilmenge deren Abschluss auch nicht in $U \backslash \ A_1$ liegt.)

`Induktionsschritt:` Seien U_1, ...,U_n offen und nicht leer vorgegeben.

$$\begin{aligned} &A_{n+1} \text{ nirgends dicht} \\ \Rightarrow\ &U_n \not\subset \overline{A_{n+1}} \\ \Rightarrow\ &\exists u_{n+1} \notin A_{n+1}, \ \exists \text{ offene Umgebung } U_{n+1} \text{ von } u_{n+1} \\ &\text{mit } \operatorname{diam}(U_{n+1}) < \frac{1}{n+1} \text{ s.d. } \overline{U_{n+1}} \subset U_n \backslash A_{n+1} \end{aligned}$$

Damit ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge nichtleerer, offener Mengen $\overline{U_{n+1}} \subset \overline{U_n}$ $\forall n > 0$. Nun soll gezeigt werden, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \neq \emptyset$. Hierfür ist die Vollständigkeit von T notwendig. Es ist $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(U_n) < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$=0, also $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(U_n) = 0$. Die Folge der $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bildet nun eine Cauchyfolge: Sei $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \operatorname{diam}(U_{n_0}) < \epsilon \\ \Rightarrow\ &\forall m, n \geq n_0 : \ u_m \in U_m \subset U_{n_0} \ \& \ u_n \in U_n \subset U_{n_0} \\ \Rightarrow\ &d(u_n, u_m) \leq \operatorname{diam}(U_{n_0}) < \epsilon \end{aligned}$$

[2] Nach [Herrlich, 1986, S.65-66].

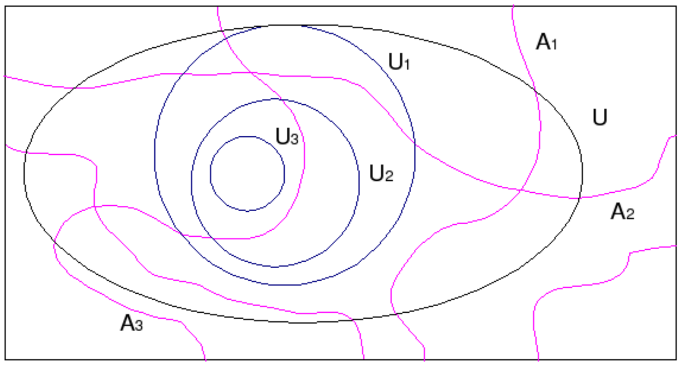

Abbildung 3.1.: Illustration der Schachtelung in einem endlichen Fall

Sei $u := \lim_{n\to\infty} u_n$ der Grenzwert dieser Cauchyfolge, der wegen der Vollständigkeit von T in T existiert. Damit u in keinem A_n liegt, ist zu zeigen, dass $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$.
Dies folgt daraus, dass stets gilt $u_n, u_{n+1}, ... \in \overline{U_n}$. Weil Grenzwerte von Folgen in abgeschlossenen Mengen stets Element ebenjener Menge sind, ist $\lim_{n\to\infty} u_n \in \overline{U_n}$ und damit ist $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$. Somit ist offensichtlich auch $u \in U$, es gilt jedoch auch, nach Konstruktion der U_n, dass $u \notin A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $u \notin A$.
$\Rightarrow u \in U \cap (T\backslash A)$, d.h. $T\backslash A$ ist dicht. □

Anmerkungen:
(1) Erstmals formuliert wurde der Kategoriensatz von René Baire in seiner Doktorarbeit *Sur les fonctions de variables réelles* im Jahre 1899, allerdings in einer weitaus schwächeren Version[3]. Er lautete frei übersetzt: *"Das Kontinuum bildet eine Menge zweiter Kategorie."*
(2) Die Aussage gilt auch in einem lokalkompakten topologischen Hausdorffraum[4]: In diesem Fall kann man analog eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden und nutzt dabei aus, dass $\overline{U_n}$ kompakt ist.
(3) Die Umkehrung gilt nicht: Hat eine Menge ein dichtes Komplement, so muss sie nicht von erster Kategorie sein. Dies sieht man am Beispiel $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Das Komplement, also $\mathbb{Q}$, liegt dicht, allerdings ist $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ von zweiter Kategorie. Wäre es nämlich erster Kategorie, so auch ganz $\mathbb{R}$ als Vereinigung zweier Mengen erster Kategorie, was dem folgenden Korollar 3.5 widerspräche.
(4) Dass die Vollständigkeit des Raumes wesentlich ist, erkennt man am Beispiel $\mathbb{Q}$. Obwohl $\mathbb{Q}$ von erster Kategorie in sich ist, ist das entsprechende Komplement, die leere Menge, nicht dicht.
(5) Die Tatsache, dass Komplemente von Mengen erster Kategorie dicht im Raum liegen, motiviert dazu, Mengen erster Kategorie im topologischen Sinne *klein* zu nennen. Hierauf wird in Kapitel 5 näher eingegangen.

Nun sollen einige Folgerungen aus dem Baireschen Kategoriensatz gezogen werden:

[3] vgl [Baire, 1990, S.113]. [4] vgl. [Rudin, 1991, S.43].

Korollar 3.5. *Sei (T,d) vollständiger, metrischer Raum, $T \neq \emptyset$. Dann ist T von zweiter Kategorie. Oder formal ausgedrückt:*

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \overline{A_{n_0}}^{\circ} \neq \emptyset$$

Beweis: Angenommen T ist von erster Kategorie. Damit läge das Komplement, also die leere Menge, dicht in T, was offenbar nur möglich ist, wenn T leer ist. □

Mit diesem Korollar lassen sich nun diverse Beispiele für Mengen zweiter Kategorie angeben:
$C([a, b])$, $L^p([a, b])$ der Raum der p-fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen, $\mathbb{C}$, aber auch jedes Intervall in $\mathbb{R}$. Abgeschlossene Intervalle bilden mit der üblichen Metrik einen vollständigen metrischen Raum. Ist ein Intervall nicht abgeschlossen, so enthält es doch zumindest ein abgeschlossenes Intervall, muss also auch zweiter Kategorie sein.

Korollar 3.6. *Sei (T,d) vollständiger, metrischer Raum und $\emptyset \neq O$ offen in T. Dann ist O von zweiter Kategorie.*

Beweis: Weil O offen ist, kann $T \backslash O$ nicht dicht in T sein und damit auch O nicht von erster Kategorie. □

Korollar 3.7. *Sei (T,d) vollständiger, metrischer Raum und $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener und dichter Teilmengen. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ dicht.*

Beweis:

$$\begin{aligned}
&O_n \text{ offen} \Rightarrow O_n^C \text{ abgeschlossen} \Rightarrow O_n^C = \overline{O_n^C} \\
&O_n \text{ dicht} \Rightarrow O_n = (O_n^C)^C = \overline{O_n^C}^C \text{ dicht} \Rightarrow O_n^C \text{ nirgends dicht} \\
\Rightarrow &(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n)^C = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^C \text{ von erster Kategorie} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \text{ dicht}
\end{aligned}$$

□

Dies ist erstaunlich, denn Schnitte dichter Mengen können ohne die Voraussetzung der Offenheit alles andere als dicht sein. Dies zeigt das Beispiel der zwei Mengen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, welche beide dicht sind, der Schnitt ist jedoch die leere Menge.

Korollar 3.8. *Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist überabzählbar (oder endlich).*

Beweis: Sei T vollständiger metrischer Raum. Angenommen T ist abzählbar, dann hat T die abzählbare Darstellung $T = \bigcup_{x\in T}\{x\}$. Weil alle $\{x\}$ abgeschlossen sind, folgt nach Korollar 3.5, dass $\overline{\{x\}}^{\circ} = \{x\}^{\circ} \neq \emptyset$ für eine $x \in X$ gilt. Also hat ein $\{x\}$ nichtleeres Inneres, was bedeutet, dass x isolierter Punkt ist. Hat ein vollständiger metrischer Raum also keine isolierten Punkte, so kann er nicht abzählbar sein. □

Soeben wurde offenbar auch der Satz von Cantor bewiesen, der mit Hilfe eines Diagonalverfahrens die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zeigt, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig, nicht endlich und hat keine isolierten Punkte.

Wie schon bemerkt, wird der Satz von Baire in der Funktionalanalysis angewandt. Er hat sich nämlich als elegante Brücke zu fundamentalen Aussagen[5] der Funktionalanalysis erwiesen, welche die Beweise zudem noch enorm verkürzt. Benutzt wird der Satz von Baire für die Beweise von dem

- **Satz über die offene Abbildung,** welcher besagt, dass eine lineare und stetige Abbildung zwischen Banachräumen genau dann surjektiv ist, wenn sie offen ist, also offene Mengen auf offene Mengen abbildet.
- **Satz vom abgeschlossenen Graphen,** der besagt, dass der Graph einer linearen und stetigen Abbildung zwischen Banachräumen abgeschlossen in dem Produktraum der Banachräume ist.
- **Satz von Banach-Steinhaus** über die gleichmäßige Beschränktheit einer Familie punktweise beschränkter Operatoren.

Exemplarisch soll hier nur der dritte Satz bewiesen werden:

Korollar 3.9 (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein vollständiger normierter Raum und $\mathcal{L}$ eine Familie beschränkter, linearer Abbildungen von X in einen normierten Raum Y. Dann gilt:*

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} ||L(x)|| < \infty \ \ \forall x \in X \Rightarrow \sup_{L\in\mathcal{L}} ||L|| < \infty$$

Beweis[6]*:* Gesucht ist eine Zerlegung des Raumes X in abgeschlossene Mengen, damit der Satz von Baire angewandt werden kann. Man betrachte dazu die Mengen

$$A_n := \{x \in X : \ \sup_{L\in\mathcal{L}} ||L(x)|| \leq n\}$$

Weil nach Voraussetzung L stetig (da beschränkt) ist, sind alle A_n abgeschlossen: Eine andere Darstellung ist

$$A_n = \bigcap_{L\in\mathcal{L}} L^{-1}(y \in Y : \ \ ||y|| \leq n)$$

und beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
Außerdem ist für jedes $x \in X$ nach Vorraussetzung $L(x)$ durch ein n beschränkt, also gilt $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Nun lässt sich der Bairesche Kategoriensatz in seiner Form des Korollar 3.5 anwenden: Ein A_{n_0} muss nichtleeres Inneres haben. Damit haben auch für jedes $L \in \mathcal{L}$ die Mengen

$$L^{-1}(y \in Y : \ \ ||y|| \leq n_0)$$

nichtleeres Inneres, das heißt es kann Satz 3.3 angewandt werden, womit bewiesen ist, dass jedes $L \in \mathcal{L}$ beschränkt ist, mit anderen Worten $\sup_{L\in\mathcal{L}} ||L|| < \infty$ gilt. □

[5] zu finden in [Alt, 2006, S.218ff]. [6] nach [Michael Reed, 1980, S.81].

3.2. Existenzbeweise mit Hilfe des Baireschen Kategoriensatzes

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass in einem vollständigen metrischen Raum das Komplement einer Menge erster Kategorie dicht liegt. Diese Aussage soll nun genutzt werden, um die Existenz gewisser Objekte zu zeigen.
Die Existenz eines Objektes lässt sich bekanntlich aus der expliziten Angabe dieses Objektes, zum Beispiel durch Konstruktion aus schon bekannten Objekten oder indirekt durch einen Widerspruch herleiten.
Die folgende Idee stammt ursprünglich von Georg Cantor, welcher wie folgt vorging um die Existenz irrationaler Zahlen zu beweisen: *Der Raum ist überabzählbar und jene Elemente, welche nicht die gesuchte Eigenschaft haben, sind abzählbar. Also muss es Elemente mit der gesuchten Eigenschaft geben.* Dieser Existenzbeweis kann mit dem Baireschen Kategoriensatz weiterentwickelt werden:

Sei T ein vollständiger metrischer Raum und E eine Eigenschaft. Angenommen, man möge die Existenz von Elementen zeigen, die diese Eigenschaft erfüllen. Dazu gelte

$$G := \{g \in T : \ \text{g erfüllt nicht E}\} \subset T.$$

Kann man nun zeigen, dass G von erster Kategorie ist, so ließe sich der Bairesche Kategoriensatz anwenden: $T \backslash G$ liegt dicht in T.
Im Fall, dass T nichtleer ist, gibt es also Elemente, die die Eigenschaft E erfüllen, diese liegen sogar dicht. Wählt man aus dem Raum ein beliebiges Element aus, so gibt es in jeder Umgebung Elemente, die die Eigenschaft erfüllen. Man sagt: „Im Sinne der Kategorien haben fast alle Elemente des Raumes die gesuchte Eigenschaft.“

Eine äußerst einfache erste Anwendung dieser Methode ist der Beweis der Existenz irrationaler Zahlen. Dies folgt sofort daraus, dass $\mathbb{Q}$ von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$, ist. Das Komplement von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, die Menge der irrationalen Zahlen, ist also eine dichte Teilmenge.

3.2.1. Nirgends differenzierbare Funktionen

Im Sinne der soeben erläuterten Beweisart soll nun gezeigt werden, dass es Funktionen gibt, die nirgends differenzierbar sind, die sich also in keinem Punkt ihres Definitionsbereiches linear approximieren lassen.
Konstruktiv wurden solche Funktionen zuerst von Karl Weierstraß angegeben, womit die damals gängige Vermutung, dass jede stetige Funktion bis auf einer höchstens abzählbaren Menge überall differenzierbar ist, widerlegt wurde[7].
Diese sogenannten Weierstraß-Funktionen sind sogar überall stetig.
An dieser Stelle soll jedoch, wie eben erläutert, auf abstraktem Wege die Existenz nirgends differenzierbarer Funktionen gezeigt werden.

[7] vgl. [Volkert, 1986, S.217].

Satz 3.10. *Im Sinne der Kategorie sind fast alle stetigen Funktionen auf [0,1] nirgends differenzierbar.*

Beweis[8]*:* Man betrachte den Raum C([0,1]) der stetigen Funktionen auf abgeschlossenem Intervall, der mit der Supremumsnorm

$$||f||_{C([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

zu einem normierten Raum wird und bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik

$$d(f,g) = ||f-g||_{C([0,1])}$$

vollständig ist. Die betrachteten Funktionen sind nach dem Satz von Heine sogar gleichmäßig stetig, denn [0,1] ist kompakt in $\mathbb{R}$. Die Vollständigkeit folgt also aus einem bekannten Satz der Analysis: *Der Grenzwert einer Folge gleichmäßig stetiger Funktionen ist stetig.*
Ziel ist es nun zu zeigen, dass die Funktionen mit einem rechtsseitig beschränkten Differenzenquotienten eine Menge erster Kategorie bilden, sie sich also als Vereinigung nirgends dichter Mengen darstellen lassen. Damit wäre das Komplement, also die Menge der nirgends differenzierbaren Funktionen, dicht in C([0,1]). Das heißt, die Existenz wäre gezeigt. Die zu betrachtende Menge ist also

$$A := \{f \in C([0,1]) : \ \exists x_0 \in [0,1[: \ f'_+(x_0) < \infty\}$$

Dabei steht f'_+ für den rechtsseitigen Differenzenquotienten. Damit A von erster Kategorie ist, benötigt man nirgends dichte Mengen, in deren Vereinigung A liegt. Betrachte dazu

$$A_n := \{f \in C([0,1]) : \exists x_0 \in [0, 1-\frac{1}{n}] : \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{h} \le n \ \ \forall h \in]0, 1-x_0[\}$$

Dies sind offenbar die Funktionen, die in einem Punkt aus $[0, 1-\frac{1}{n}]$ einen durch n beschränkten, rechtsseitigen Differenzenquotienten haben.
Ist nun $f \in A$, so ist f'_+ in einem x_0 durch ein m beschränkt und für ein p gilt $x_0 \in [0, 1-\frac{1}{p}]$. Mit $n := \max\{m,p\}$ gilt also $f \in A_n$ und daher ist $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zuerst soll nun gezeigt werden, dass A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossen ist. Dies erleichtert den Beweis, dass A_n nirgends dicht ist.
A_n `ist abgeschlossen:` Sei dazu $f \in \overline{A_n}$. Zu zeigen ist, dass $f \in A_n$. Die Stetigkeit von f ist klar, da $\overline{A_n} \subset C([0,1])$ ist (denn C([0,1]) ist abgeschlossen). Es reicht also zu zeigen, dass

$$\exists x_0 \in [0, 1-\frac{1}{n}] : \ |f(x_0+h) - f(x_0)| \le nh \ \ \forall h \in]0, 1-x_0[$$

[8] nach [Oxtoby, 1971, S.53ff.].

Da $f \in \overline{A_n}$ sind in jeder Umgebung von f Elemente aus A_n, daher kann man eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A_n wählen, welche gegen f konvergiert. Zudem

$$f_k \in A_n \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ \ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Die Folgenglieder x_k werden dabei so gewählt, dass x_k die Stelle ist, an der f_k einen beschränkten rechtsseitigen Differenzenquotienten hat.
Offensichtlich ist die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt, hat also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge

$$x_j := x_{k_j} \to x_0, \ \ x_0 \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$$

mit zugehörigem f_j. Wegen $f_j \in A_n$ gilt weiterhin

$$|f_j(x_j + h) - f_j(x_j)| \leq nh \ \ \forall h \in]0, 1 - x_j[$$

Sei nun $h \in]0, 1 - x_0[$ beliebig. Wegen $x_j \to x_0$ kann man j hinreichend groß wählen, dass auch $h \in]0, 1 - x_j[$ gilt. Somit ergibt sich per Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&|f(x_0 + h) - f(x_0)| \\
\leq &|f(x_0 + h) - f(x_j + h)| + \underbrace{|f(x_j + h) - f_j(x_j + h)|}_{\leq d(f, f_j)} + \underbrace{|f_j(x_j + h) - f_j(x_j)|}_{\leq nh} \\
&+ \underbrace{|f_j(x_j) - f(x_j)|}_{\leq d(f_j, f)} + |f(x_j) - f(x_0)| \\
\leq &|f(x_0 + h) - f(x_j + h)| + 2d(f, f_j) + nh + |f(x_j) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

Nutzt man nun aus, dass sowohl $f_j \to f$ als auch $x_j \to x_0$ für $j \to \infty$ gilt, und dass f in den Punkten x_0 und $x_0 + h$ stetig ist, so liefert der Grenzübergang $j \to \infty$ die Behauptung

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq nh \ \ \forall h \in]0, 1 - x_0[$$

das heißt $f \in A_n$.
A_n `ist nirgends dicht:` Aufgrund des Vorangegangenen reicht es zu zeigen, dass $A_n^\circ = \emptyset$ ist.
Sei $f \in A_n$ und $\epsilon > 0$. Um zu widerlegen, dass f ein innerer Punkt ist, reicht es zu zeigen, dass es in der Epsilonumgebung eine Funktion g gibt, die nicht in A_n liegt. Also eine stetige Funktion g, für die gelten soll:

$$||f - g||_{C([0,1])} \leq \epsilon, \ \ g'_+(x) > n, \ \ \forall x \in [0, 1[$$

Ziel ist es nun, eine Zackenfunktion zu konstruieren, welche im Epsilonschlauch um f verläuft und überall eine größere Steigung als n annimmt. Vorerst muss man f durch eine differenzierbare Funktion approximieren.
Nach dem Satz von Weierstraß lässt sich f beliebig genau bezüglich der Norm durch ein

Polynom p approximieren: $||f-p||_{C([0,1])} < \frac{\epsilon}{2}$.
Die Zackenfunktion wird schließlich wie folgt konstruiert:

$$\varphi_m : [0,1] \to [0, \frac{1}{2}], \ \ \varphi_m = \sum_{k=0}^{m-1} \varphi_{m,k}$$

wobei

$$\varphi_{m,k}(x) = \begin{cases} mx - k, & \text{wenn } x \in [\frac{k}{m}, \frac{2k+1}{2m}[\\ -mx + k + 1, & \text{wenn } x \in [\frac{2k+1}{2m}, \frac{k+1}{m}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit hat die Zackenfunktion genau m Zacken (in den Punkten $(\frac{2k+1}{2m}, \frac{1}{2}), k = 0, ..., m-1$), auf den linearen Abschnitten eine Steigung von m bzw. -m und es gilt $||\varphi_m|| = \frac{1}{2}$.

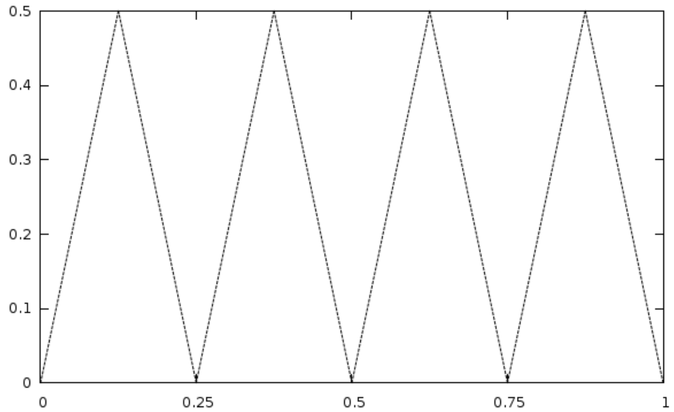

Abbildung 3.2.: Zackenfunktion für m=4

Setze jetzt (für n und ϵ fest)

$$m := \frac{n + ||p'||}{\epsilon} + 1 \tag{3.1}$$

und betrachte die Funktion

$$g(x) := p(x) + \epsilon\varphi_m(x)$$

Diese verläuft im Epsilonschlauch um f:

$$\begin{aligned} ||f-g|| &= ||f - p + \epsilon\varphi_m|| \\ &\leq ||f-p|| + \epsilon \underbrace{||\varphi_m||}_{=\frac{1}{2}} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Es ist noch zu zeigen, dass $g \notin A_n$. Seien dazu $x \in [0,1[$ und h so gewählt, dass x+h noch innerhalb des linearen Abschnittes ist, in dem auch x liegt, was möglich ist, weil die Intervalle der Partitionierung rechtsoffen sind. (Wähle beispielsweise den halben Weg zum nächsten Abschnitt: $h = x + \frac{1}{2}(\frac{\lceil 2mx \rceil}{2mx} - x)$, $''\lceil\ \rceil''$ rundet zur nächsten ganzen Zahl.) Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{|g(x+h)-g(x)|}{h} &= \frac{|p(x+h)+\epsilon\varphi_m(x+h)-(p(x)+\epsilon\varphi_m(x))|}{h} \\
&= \frac{|\epsilon(\varphi_m(x+h)-\varphi_m(x))+p(x+h)-p(x)|}{h} \\
{}^{9}&\geq \epsilon\underbrace{\frac{|\varphi_m(x+h)-\varphi_m(x)|}{h}}_{=m} - \underbrace{\frac{|p(x+h)-p(x)|}{h}}_{=|p'(\psi)|,\ \psi\in(x,x+h)} \\
&\geq \epsilon m - ||p'||
\end{aligned}$$

Hierbei wurde noch der Mittelwertsatz auf p angewandt.
Damit gilt $\epsilon m - ||p'|| > n \quad \Leftrightarrow \quad m > \frac{n+||p'||}{\epsilon}$, was nach (3.1) offenbar erfüllt ist. Damit erhält man nun

$$\frac{|g(x+h)-g(x)|}{h} > n \ \forall x \in [0,1[$$

oder anders gesagt, g hat keinen durch n beschränkten rechtsseitigen Differenzenquotienten und daher ist $g \notin A_n$. Damit ist gezeigt, dass A von erster Kategorie ist.
Nach dem Satz von Baire ist das Komplement von A, also die Menge aller Funktionen, die in keinem Punkt eine rechtsseitige Ableitung haben und damit auch nirgends differenzierbar sind, dicht im Raum der stetigen Funktionen. □
Mit dieser Erkenntnis wird klar, dass eine nirgends differenzierbare Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(b_k x)$$

sein kann, also gleich einer gleichmäßig konvergenten Reihe für ein geeignetes $\varphi \in C([0,1])$.
In eben jener Form sind im Übrigen auch die nirgends differenzierbaren Weierstraßfunktionen.

3.2.2. L^p-Funktionen

Hier sollen die Räume L^p und L^q mit $p < q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ auf dem offenen Einheitsintervall betrachtet werden:

$$L^p := L^p(]0,1[) = \{f :]0,1[\to \mathbb{R} : \int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty\}$$

mit der Norm

$$||f||_p := ||f||_{L^p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p dx}, \ \ dx := d\lambda(x)$$

[9] umgekehrte Dreiecksungleichung.

und dem Lebesguemass λ auf $[0,1]$. Genauer steht ein Element f für die Äquivalenzklasse der Funktionen, die λ-fast überall gleich f sind. Auf diese Weise erhält man einen normierten und auch vollständigen Vektorraum[10], in dem sich der Baireschen Kategoriensatz anwenden lässt.
Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung[11] lässt sich schnell zeigen, dass auf $]0,1[\ \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$ dann $L^q \subseteq L^p$ gilt. Da man Funktionen finden kann, die in einem L^p, aber nicht in einem L^q liegen, gilt jedoch keine Gleichheit der Funktionenräume. Beispielsweise findet man die (Äquivalenzklasse der) Funktion

$$g :]0,1[\to \mathbb{R}$$
$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Es ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$ also $g \in L^1(]0,1[)$,
aber $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$ also $g \notin L^2(]0,1[)$.

Nun soll gezeigt werden, dass L^q und L^p im Sinne der Kategorie sogar einen wesentlichen Größenunterschied aufweisen.

Satz 3.11. *$L^q(]0,1[)$ ist von erster Kategorie in $L^p(]0,1[)$, $1 \leq p < q < \infty$.*

Beweis[12]: Wie im letzten Beweis muss man für L^q nirgends dichte Mengen finden, die es überdecken. Betrachte dazu die Mengen

$$A_n := \{f \in L^p : \ ||f||_q \leq n\} \subset L^p$$

für die $L^q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ gilt, denn jede L^q-Funktion ist bezüglich der Norm durch ein $n \in \mathbb{N}$ beschränkt. Jetzt ist zu zeigen, dass alle A_n nirgends dicht in L^p sind. Dazu wird wieder zuerst die Abgeschlossenheit gezeigt.
A_n `abgeschlossen in` L^p: Sei dazu $f \in \overline{A_n}$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge für die $||f_k - f||_p \to 0$ für $k \to \infty$ gilt. Zu zeigen ist $f \in A_n$.
Die Konvergenz, die sogenannte Konvergenz im p-ten Mittel, impliziert die Konvergenz einer Teilfolge λ-fast überall[13] $f_j := f_{k_j} \to f$. Unter Anwendung des Lemmas von Fatou[14] erhält man

$$\int_0^1 |f(x)|^q dx = \int_0^1 \liminf_{j\to\infty} |f_j(x)|^q dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_0^1 |f_j(x)|^q dx \leq n$$

weil $f_j \in A_n\ \forall j \in \mathbb{N}$ gilt. Also ist auch $f \in A_n$ und damit A_n abgeschlossen in L^p.
A_n `hat leeres Inneres`: Angenommen $A_n^\circ \neq \emptyset$.
$\Rightarrow \exists \tilde{f} \in A_n$ s.d. für ein $\epsilon > 0$ gilt:

$$U_\epsilon(\tilde{f}) = \{f : \ ||\tilde{f} - f||_p < \epsilon\} \subset A_n$$

[10] Satz von Fischer-Riesz, siehe [Alt, 2006, S.55ff.]. [11] zu finden in [Alt, 2006, S.52]. [12] nach Anleitung aus [Rudin, 1991, S.53]. [13] vgl [Elstrodt, 2010, S.251-255]. [14] zu finden in [Elstrodt, 2010, S.144].

Sei jetzt $h \in L^p$ beliebig und setze $\tilde{h} := \tilde{f} + \frac{\epsilon}{2} \frac{h}{||h||_p}$. Damit erhählt man

$$||\tilde{f} - \tilde{h}||_p = ||\frac{\epsilon}{2} \frac{h}{||h||_p}||_p = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

also $\tilde{h} \in U_\epsilon(\tilde{f})$ und insbesondere $\tilde{h} \in L^q$. Umstellen nach h liefert jedoch

$$h = \frac{2||h||_p}{\epsilon}(\tilde{h} - \tilde{f})$$

und weil L^q Vektorraum ist folgt $h \in L^q$. Da die Inklusion $L^q \subset L^p$ gilt und $h \in L^p$ beliebig gewählt wurde, erhält man $L^p = L^q$, im Widerspruch zu den Vorüberlegungen. Zusammen folgt $\overline{A_n}^\circ = \emptyset$, also ist L^q von erster Kategorie in L^p. □

Nach dem Baireschen Kategoriensatz, ist also die Menge der Funktionen, die in L^p liegen, aber nicht in L^q, dicht im Raum der L^p-Funktionen. Nach Angabe nur einer solchen Funktion folgt mit dem Kategoriensatz also die Existenz beliebig vieler weiterer „nicht-L^q"-Funktionen, denn diese sind im Sinne der Kategorie fast alle.

4. Bairesche Funktionen

Eine Klassifizierung, wie Baire sie für Mengen vollzogen hat, gibt es auch für reelle Funktionen (hier auf dem Intervall [0,1]). Die nullte Klasse bilden dabei die stetigen Funktionen:

Definition 4.1 (Nullte Klasse)**.**

$$F_0 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \quad f \in C([0,1])\}$$

Definition 4.2 (Erste Klasse)**.**

$$F_1 := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } F_0 : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in [0,1]\} \backslash F_0$$

Die erste Klasse bilden also alle Funktionen, die selber nicht stetig sind, sich aber als punktweise Grenzfunktion stetiger Funktionen darstellen lassen. In diesem Sinne werden auch die weiteren Klassen rekursiv definiert:

Definition 4.3 (n-te Klasse)**.**

$$F_n := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ aus } F_{n-1} : f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \ \forall x \in [0,1]\} \backslash F_{n-1}$$

Diese Klassifikation kann noch fortgeführt werden, bis man zu einer Menge von Funktionen gelangt, welche dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ hat[1]. Dass alle Baireschen Klassen nicht leer sind, wurde von Henri Lebesgue gezeigt[2]. Hier soll nur gezeigt werden, dass die zweite Klasse nicht leer ist:
Beispiel: *Die Dirichletfunktion*

$$D : [0,1] \to \{0,1\}, \ \ D(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Offenbar ist die Dirichletfunktion weder nullter (D ist überall unstetig) noch erster Klasse (denn angenommen D ist in der ersten Klasse, dann sind die Unstetigkeitsstellen von erster Kategorie, im Widerspruch zu [0,1] von zweiter Kategorie, siehe dazu Satz 4.7 im nächsten Abschnitt).
D lässt sich jedoch als Grenzfunktion der Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darstellen wobei

$$\varphi_n : [0,1] \to \{0,1\}, \ \ \varphi_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = r_i, \ \ i = 1, ..., n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

[1] vgl. [Natanson, 1969, S.439-440.]. [2] vgl. [Natanson, 1969, S.444ff.].

$(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dabei eine Aufzählung von $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Jetzt ist also zu zeigen, dass φ_n für alle $n\in\mathbb{N}$ in der ersten Klasse ist. In der Tat lassen sie sich durch die stetigen Funktionen

$$\varphi_{n,p}(x)=\sum_{i=1}^{n}(1-|x-r_i|)^p$$

approximieren, denn $p\to\infty$ liefert $(1-|x-r_i|)^p\to\begin{cases}1, & \text{wenn } x=r_i\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$ □

4.1. Grenzfunktion stetiger Funktionen

Mit Hilfe des Baireschen Kategoriensatzes ist es möglich zu zeigen, dass die Stetigkeitsstellen einer Funktion erster Klasse dicht liegen. Dafür benötigt man zunächst die Oszillationsfunktion:

Definition 4.4 (Oszillationsfunktion). *Für eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und ein Intervall I definiert man die Oszillation von f auf I als $w(I):=\sup\limits_{x\in I}f(x)-\inf\limits_{x\in I}f(x)$, welche in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ angenommen wird.*

Dies ist offensichtlich der größte Sprung, den f auf I macht. Um die Oszillation von f in einem Punkt definieren zu dürfen benötigt man zunächst folgenden Satz:

Satz 4.5. *Für $x_0\in\mathbb{R}$ fest ist $w((x_0-\delta,x_0+\delta))=w(U_\delta(x_0))$ monoton wachsend bezüglich δ.*

Beweis: Sei $\delta_1<\delta_2$, x_0 fest. Dann ist

$$w(U_{\delta_2}(x_0))-w(U_{\delta_1}(x_0))$$

$$=\underbrace{\sup_{x\in U_{\delta_2}(x_0)}f(x)-\sup_{x\in U_{\delta_1}(x_0)}f(x)}_{\geq 0,\ \text{denn}\ U_{\delta_1}(x_0)\subset U_{\delta_2}(x_0)}+\underbrace{\inf_{x\in U_{\delta_1}(x_0)}f(x)-\inf_{x\in U_{\delta_2}(x_0)}f(x)}_{\geq 0}\geq 0$$

Also $w(U_{\delta_1}(x_0))\leq w(U_{\delta_2}(x_0))$. □

Damit existiert also der Grenzwert $w(x_0):=\lim_{\delta\to 0}w(U_\delta(x_0))$ und dieser ist insbesondere kleiner als w(I) für alle x_0 enthaltenden Intervalle I. Nun lässt sich eine Beziehung zwischen der Stetigkeit der Funktion f und der Oszillation in einem Punkt herstellen:

Satz 4.6. *Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$. Dann gilt: $w(x_0)=0\Leftrightarrow f$ stetig in x_0.*

Beweis: $''\Rightarrow''$ Sei $\epsilon>0$. Zu zeigen: $\exists\delta>0: y\in U_\delta(x_0)\Rightarrow|f(y)-f(x_0)|<\epsilon$. Nach Vorraussetzung gilt:

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in U_\delta(x_0)}f(x)-\inf_{x\in U_\delta(x_0)}f(x)=0$$

$$\Rightarrow\exists\delta>0:\sup_{x\in U_\delta(x_0)}f(x)-\inf_{x\in U_\delta(x_0)}f(x)<\epsilon$$

Für $y \in U_\delta(x_0)$ ist also

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \sup_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) < \inf_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) + \epsilon \leq f(x_0) + \epsilon \\ \text{und } f(y) &\geq \inf_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) > \sup_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) - \epsilon \geq f(x_0) - \epsilon \end{aligned}$$

Also zusammen $|f(y) - f(x_0)| < \epsilon$
$'' \Leftarrow''$ Sei $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \exists \delta > 0 : \ |f(y) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall y \in U_\delta(x_0) \\ &\Rightarrow \ f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} < f(y) < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \ \forall y \in U_\delta(x_0) \\ &\Rightarrow \ \sup_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) < f(x_0) + \frac{\epsilon}{2} \text{ und } \inf_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) > f(x_0) - \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ \sup_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) - \inf_{x\in U_\delta(x_0)} f(x) < \epsilon \\ &\Rightarrow \ w(x_0) = 0 \end{aligned}$$

□

Nun folgt der angekündigte Satz über die Dichtheit der Stetigkeitsstellen der Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen:

Satz 4.7. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und f ihre punktweise Grenzfunktion. Dann liegt die Menge der Stetigkeitsstellen von f dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis[3]*:* Nach dem Satz von Baire ist es hinreichend, dass das Komplement der Stetigkeitsstellen eine Menge erster Kategorie bildet. Nach dem vorangegangenen Satz ist es naheliegend, dazu die Menge $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ zu betrachten, wobei $A_n := \{x \in \mathbb{R} : \ w(x) \geq \frac{1}{n}\}$.
Die Menge der Unstetigkeitsstellen bildet offenbar eine Teilmenge von A. Es ist jetzt zu zeigen, dass alle Mengen A_n nirgends dicht sind.
`Widerspruchsbeweis:` Angenommen $\exists n_0$: A_{n_0} ist nicht nirgends dicht, d.h. $\overline{A_{n_0}}^{\circ} \neq \emptyset$.
Dann existiert ein nichtleeres offenes Intervall $O \subset A_{n_0}$ (denn $\overline{A_{n_0}}$ enthält eine offene Menge).
Wegen der punktweisen Konvergenz $f_n \to f$ lässt sich O darstellen als $O := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m$, wobei

$$O_m := \{x \in O : \ \forall i \geq m \text{ ist } |f(x) - f_i(x)| \leq \frac{1}{5n_0}\}$$

welche wegen der Stetigkeit der f_i für alle $m \in \mathbb{N}$ abgeschlossen sind.
Nach Korollar 3.5 existiert also ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass O_{m_0} nicht nirgends dicht in O ist.
Daher muss $\overline{O_{m_0}}$ eine offene Menge enthalten: $\exists$ U offen, $\neq \emptyset$: $U \subset \overline{O_{m_0}} = O_{m_0} \subset O$.
Sei nun $x_0 \in U$ und $\delta > 0$ sodass $U_\delta(x_0) \subset U$ und zusätzlich, unter Anwendung der Stetigkeit von f_{m_0}, gelte:

$$|f_{m_0}(x_0) - f_{m_0}(x)| \leq \frac{1}{5n_0}$$

[3] nach [Herrlich, 1986, S.67].

Seien nun x, y$\in U_\delta(x_0)$. Per Dreiecksungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(y)|\\ \leq&|f(x)-f_{m_0}(x)|+|f_{m_0}(x)-f_{m_0}(x_0)|+|f_{m_0}(x_0)-f_{m_0}(y)|+|f_{m_0}(y)-f(y)|\\ \leq&\frac{4}{5n_0}\end{aligned}$$

denn jeder der 4 Terme lässt sich mit $\frac{1}{5n_0}$ abschätzen (beachte $U_\delta(x_0) \subset O_{m_0}$, also $\forall x \in U_\delta(x_0)$: $|f(x) - f_{m_0}(x)| \leq \frac{1}{5n_0}$).
Für die Oszillation von f in x_0 erhält man jetzt:

$$w(x_0) \leq w(U_\delta(x_0)) = \sup_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) - \inf_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) \leq \frac{4}{5n_0} < \frac{1}{n_0}$$

Dies steht offenbar im Widerspruch dazu, dass $x_0 \in A_{n_0}$ (es war $x_0 \in U \subset O_{m_0} \subset O \subset A_{n_0}$). Damit ist also doch jedes A_n nirgends dicht, also sind die Unstetigkeitsstellen von erster Kategorie und somit das Komplement, die Menge der Stetigkeitsstellen von f, dicht in $\mathbb{R}$. □
Im Sinne der Kategorie ist die Grenzfunktion damit fast überall stetig.

Hier offenbart sich auch der Zusammenhang zwischen Funktionen erster Klasse und Mengen erster Kategorie, in welchem jener Begriff seinen Ursprung hat[4]: Die Unstetigkeitsstellen einer Funktion erster Klasse, also einer Grenzfunktion stetiger Funktionen, bilden eine Menge erster Kategorie.
Eine einfache Folgerung des eben bewiesenen Satzes ist beispielsweise, dass die Ableitung einer stetigen Funktion nicht überall unstetig sein kann. Dies wird ersichtlich, wenn man sie als

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

darstellt.

[4] [Oxtoby, 1971, S.37].

5. Analogien zur Maßtheorie

Der Satz von Baire liefert in einem metrischen Raum die Berechtigung Mengen *klein* zu nennen, wenn sie von erster Kategorie sind. Eine andere Motivation, eine Menge *klein* zu nennen, kommt jedoch ganz ohne eine Topologie aus: Die Bestimmung seines Volumens. Dies ist Aufgabe der Maßtheorie. Daher sollen in diesem Abschnitt die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Nullmengen und Mengen erster Kategorie in $\mathbb{R}$ untersucht werden.

Sei nun $\mathcal{N}$ die Familie der Nullmengen bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$, also die Teilmengen N von $\mathbb{R}$ für die $\lambda(N) = 0$ gilt und $\mathcal{A}$ die Familie der Mengen erster Kategorie.

5.1. Gemeinsamkeiten

Für eine erste Gemeinsamkeit benötigt man folgende Definition:

Definition 5.1 (sigma-Ideal). *Eine Familie $\mathcal{J} := \{J_i\}_{i \in I}$ von Mengen heißt sigma-Ideal* :⇔

$$(J1)\ \ A_n \in \mathcal{J}\ \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{J}$$

$$(J2)\ \ A \in \mathcal{J},\ \ B \subset A \Rightarrow B \in \mathcal{J}$$

Dass die Familie der Mengen erster Kategorie ein sigma-Ideal bildet, wird in den Anmerkungen zur Definition dieser Mengen ersichtlich. Auch die Familie der Nullmengen bildet ein sigma-Ideal. Dies ist leicht damit gezeigt, dass das Lebesguemaß sigma-subadditiv und isoton ist[1].
Somit weisen $\mathcal{N}$ und $\mathcal{A}$ eine gemeinsame Struktur auf: Sie bilden beide sigma-Ideale. Diese Struktur ist mit der intuitiven Vorstellung *kleiner* Mengen verträglich: Teilmengen *kleiner* Mengen sollen *klein* sein und abzählbar viele *kleine* Mengen bleiben *klein*.
Sie besitzen sogar einen gemeinsamen Kern:

Satz 5.2. *Die Familie der abzählbaren Mengen bildet ein echtes Unter-sigma-Ideal der Nullmengen und Mengen erster Kategorie.*

Beweis: Die Axiome eines sigma-Ideals können leicht verifiziert werden. Eine abzählbare Menge ist stets erster Kategorie und außerdem eine Nullmenge, da Punkte Nullmengen sind und $\mathcal{N}$ sigma-Ideal ist. Damit die Inklusionen echt sind, ist eine Menge gesucht, welche Nullmenge, erster Kategorie und überabzählbar ist.
Hier erweist sich die Cantormenge C, wie sie in Beispiel (4) zur Definition nirgends

[1] zur Erläuterung dieser Begriffe siehe Anhang A.2.

dichter Mengen eingeführt wurde, als die gesuchte Menge. □

Zwei weitere Gemeinsamkeiten von Nullmengen und Mengen erster Kategorie sind, dass sie beide keine Intervalle enthalten und dass man die reellen Zahlen ebenso auch nicht in eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen zerlegen, denn abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
Insbesondere gibt es ein Analogon zum Satz von Baire:

Satz 5.3. *Sei $N \in \mathcal{N}$. $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \backslash N$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis: Vorerst ist festzustellen: In einem metrischen Raum (M,d) gilt für eine beliebige Menge $A \subset M$: $M = A^\circ \dot\cup \overline{A^C}$. Denn wie im Beweis (2.1)$\Rightarrow$(2.2) von Definition 2 (Nirgends dicht) zeigt man

$$x \notin A^\circ \Leftrightarrow x \in \overline{A^C}$$

Damit gilt also auch $\overline{A^C} = (A^\circ)^C$.
Sei nun N eine Nullmenge in $\mathbb{R}$. Dann ist $\overline{\mathbb{R} \backslash N} = \mathbb{R} \backslash N^\circ$. Jedoch gilt $N^\circ = \emptyset$, denn angenommen, es enthalte ein offenes ϵ-Intervall, dann hätte dies ein Maß von 2ϵ, was der Tatsache, dass N eine Nullmenge ist, widerspräche. □

5.2. Unterschiede

Jedoch gibt es auch erschütternde Unterschiede zwischen den Familien $\mathcal{N}$ und $\mathcal{A}$:

Satz 5.4. *Es existiert eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}$ in eine Menge erster Kategorie und in eine Nullmenge (welche sogar zweiter Kategorie ist).*

Beweis: Gesucht ist $\mathbb{R} = A \dot\cup N$, A von erster Kategorie, N Nullmenge von zweiter Kategorie. Betrachte dazu eine Aufzählung der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{q_i\}$ und dazu die offenen Intervalle der Länge $2^{-(i+j)}$

$$I_{i,j} = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - q_i| < 2^{-(i+j+1)}\}$$

Dann ist die Menge $N_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{i,j}$ als Vereinigung offener Mengen offen und dicht, weil $\mathbb{Q} \subset N_j \ \forall j \in \mathbb{N}$ gilt.
Setze jetzt $N := \bigcap_{j=1}^{\infty} N_j$. Dies soll die gesuchte Nullmenge sein. Sei dazu $\epsilon > 0$ und wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $(\frac{1}{2})^j < \epsilon \ \forall j \geq j_0$. Mit der Positivität, Isotonie und σ-Subadditivität des Lebesguemaßes erhält man:

$$0 \leq \lambda(N) \leq \lambda(N_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(i+j)} = 2^{-j} \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = 2^{-j}$$

$\Rightarrow \lambda(N) \leq (\frac{1}{2})^j \ \ \forall j \geq j_0$, also muss $\lambda(N) = 0$ sein.
Setze nun $A := N^C$. Damit ist die Vereinigung von A und N disjunkt und weil

$$N^C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{N_j^C}_{=:A_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

bleibt nur noch zu zeigen, dass A_j nirgends dicht ist:

$$\begin{aligned}
&N_j \text{ dicht und offen} \\
\Rightarrow &N_j^{CC} \text{ dicht} \\
\Rightarrow &\overline{N_j^C}^C \text{ dicht} \\
\Rightarrow &N_j^C = A_j \text{ nirgends dicht} \\
\Rightarrow &A \text{ ist von erster Kategorie}
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man $\mathbb{R} = A\dot{\cup}N$, A von erster Kategorie, N Nullmenge. Außerdem kann N nicht erster Kategorie sein, denn sonst hätte man eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in Mengen erster Kategorie, was nach dem Satz von Baire nicht möglich ist. □

Die Menge N aus Satz 5.4 ist eine Nullmenge und trotzdem von zweiter Kategorie. Mit Hilfe des Cantorschen Diskontinuums (Beispiel (4) nirgends dichter Mengen) kann man im Gegenzug eine Menge vollen Maßes konstruieren, welche erster Kategorie ist.

Satz 5.5. $\exists A \subset [0,1]: \ \lambda(A) = 1$, *$A$ ist von erster Kategorie.*

Beweis[2]*:* Zunächst muss gezeigt werden, dass zu jedem $0 < \alpha < 1$ ein variiertes Cantorsches Diskontinuum mit $\lambda(C) = 1 - \alpha$ konstruiert werden kann, welches noch immer nirgends dicht ist.
Sei also $0 < \alpha < 1$. Die Länge der zu entfernenden offenen, mittleren Teilintervalle soll nun variiert werden. Setze zunächst

$$\begin{aligned}
C_{\alpha_0} &:= [0,1] \\
C_{\alpha_1} &:= C_{\alpha_0} \setminus]\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha[
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird also ein Intervall der Länge $\frac{1}{2}\alpha$ entfernt. Im nächsten Schritt werden die mittleren, offenen Intervalle der Länge $\frac{1}{8}\alpha$ entfernt, daraufhin die der Länge $\frac{1}{32}\alpha$ etc. Im n-ten Schritt werden also 2^{n-1} Intervalle der Länge $\frac{1}{2^{2n-1}}\alpha$ entfernt. Setzt man $C_\alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_{\alpha_n}$, so beträgt die Länge aller entfernten Intervalle zusammen

$$\alpha(2^0 \cdot \frac{1}{2^1} + 2^1 \cdot \frac{1}{2^3} + 2^2 \cdot \frac{1}{2^5} + ... + \underbrace{2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{2n-1}}}_{=\frac{1}{2^n}} + ...) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \alpha$$

Damit gilt also $\lambda(C_\alpha) = 1 - \alpha$.
Außerdem ist C_α nirgends dicht, dies lässt sich analog zum normalen Cantorschen Diskontinuum zeigen, denn C_α bleibt abgeschlossen und die verbleibenden Teilintervalle können wieder beliebig klein gewählt werden, sodass sie keine vorgegebene offene Menge enthalten.

[2] nach [Bernard R. Gelbaum, 1964, S.88-89,99].

Da es also zu jedem $0 < \alpha < 1$ ein C_α mit Maß $1 - \alpha$ gibt, kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $C_{\frac{1}{n}}$ betrachten welche jeweils die Cantormengen mit dem Maß $\frac{n}{n-1}$ sind. Setze nun die Menge $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}$. Diese ist dann erster Kategorie, weil jedes $C_{\frac{1}{n}}$ nirgends dicht ist. Mit der Isotonie des Maßes folgt weiter

$$\frac{n-1}{n} = \lambda(C_{\frac{1}{n}}) \leq \lambda(A) \leq 1$$

Die Abschätzung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, also folgt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1$, dass $\lambda(A) = 1$ ist. $\square$

Die Sätze 5.4 und 5.5 beweisen jetzt

Satz 5.6. *Es gilt weder $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ noch $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$.*

Zusammen mit Satz 5.2 ergibt sich nun folgende, unproportionierte Darstellung:

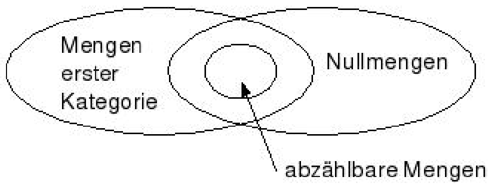

Abbildung 5.1.: Inklusionen der sigma-Ideale

6. Schlussbemerkungen

Der Vergleich von Nullmengen und Mengen erster Kategorie zeigt, dass ihr Zusammenspiel in $\mathbb{R}$ durchaus interessante Konsequenzen hat, nämlich, dass man einen überabzählbaren, also großen Raum, in zwei *kleine* Mengen zerlegen kann. Jedoch sind jene zwei Mengen aus verschiedenen Gründen als *klein* anzusehen. Mehrere Resultate des letzten Abschnits motivieren dazu, die Kleinheitsbegriffe der Baireschen Kategorie und der Maßtheorie strikt voneinander zu trennen. Die Struktur des sigma-Ideals, welche partiell der intuitiven Vorstellung kleiner Mengen genügt, und die Tatsache, dass Komplemente von Nullmengen und Mengen erster Kategorie dichte Teilmengen, also in jedem Fall *groß* sind, zeigt aber, dass der Kleinheitsbegriff auf beide Mengenfamilien durchaus zutreffend ist.

Die Klassifizierung reeller Funktionen wurde nur der Vollständigkeit halber ausgeführt, hat aber keine so nutzvollen Anwendungsmöglichkeiten wie die Bairesche Mengenklassifikation. Jedoch zeigte der Satz über die Stetigkeitsstellen von Funktionen erster Klasse eine Verbindung zur Kategorie auf und behält sich noch viele Anwendungsmöglichkeiten vor.

Der Bairesche Kategoriensatz erwies sich hingegen als starkes Hilfsmittel, Existenzbeweise durchzuführen. Diese waren abstrakter Art, zeigten jedoch die Existenz *beliebig vieler* Elemente der gesuchten Eigenschaft. Jedoch ist es auch zumeist möglich, ein Element mit der gesuchten Eigenschaft zu konstruieren, womit der Umweg über die Bairesche Kategorie als unnötig erscheint.
Genauso verläuft es in der Funktionalanalysis. Die Sätze, welche mit dem Baireschen Kategoriensatz bewiesen werden, lassen sich auch ohne ihn beweisen. Nach J.C. Oxtoby gibt es sogar nur ein Beispiel für ein Problem, das zuerst mit dem Baireschen Kategoriensatz gelöst wurde, nämlich der Beweis der Existenz eines transitiven Automorphismusses des abgeschlossenen Einheitsquadrates[1]. Trotzdem hat der Bairesche Kategoriensatz Einzug in jede Funktionalanalysisvorlesung gefunden, weil er scheinbar fundamental hinter vielen wichtigen Theoremen steht und insbesondere die Beweise elegant verkürzt. Letztendlich lässt sich sagen, dass der Bairesche Kategoriensatz eine auf das Grundgerüst vollständiger metrischer Räume zurückgehende Beobachtung ist.

[1] vgl. [Oxtoby, 1971, S.83].

Literaturverzeichnis

[Alt, 2006] Alt, H. W. (2006). *Lineare Funktionalanalysis.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, fünfte, überarbeitete Auflage.

[Baire, 1990] Baire, R. (1990). *Ouevres Scientifiques.* Gaulthier-Villars, Bordas, Paris.

[Bernard R. Gelbaum, 1964] Bernard R. Gelbaum, J. M. O. (1964). *Counterexamples in Analysis.* Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam.

[Elstrodt, 2010] Elstrodt, J. (2010). *Maß- und Integrationstheorie.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[Herrlich, 1986] Herrlich, H. (1986). *Einführung in die Topologie.* Heldermann Verlag, Berlin.

[Michael Reed, 1980] Michael Reed, B. S. (1980). *Methods of Modern Mathematical Pysics, I: Functional Analysis.* Academic Press, San Diego.

[Natanson, 1969] Natanson, I. P. (1969). *Theorie der Funktionen in einer Veränderlichen.* Akademie-Verlag, Berlin.

[Oxtoby, 1971] Oxtoby, J. C. (1971). *Maß und Kategorie.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[Rudin, 1991] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis.* McGraw-Hill, Madison.

[Volkert, 1986] Volkert, K. (1986). Die geschichte der pathologischen funktionen ein beitrag zur entstehung der mathematischen methodologie. http://www.springerlink.com/content/h47787nv5l052863/.

Anhang

A. Elementare Begriffe

A.1. Aus der Funktionalanalysis

Definition 1 (Normierter Raum)**.** *Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\Bbbk$. (V,d) wird normierter Raum genannt, wenn es eine Funktion $||\cdot|| : V \to \Bbbk$ gibt, die für alle $v, w \in V$ und Skalare $\alpha \in \Bbbk$*

$$\begin{aligned}
&(N1) \;\; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0\\
&(N2) \;\; ||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||\\
&(N3) \;\; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||
\end{aligned}$$

erfüllt.

Definition 2 (Metrischer Raum)**.** *(T,d) wird metrischer Raum genannt, wenn d eine (abstandsmessende) Funktion $d : T \times T \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ für eine Menge T ist, welche den folgenden Axiomen genügt:*

$$\begin{aligned}
&(M1) \;\; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\\
&(M2) \;\; d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in T\\
&(M3) \;\; d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in T
\end{aligned}$$

Mit einer Metrik lässt sich der *Durchmesser* einer nichtleeren Menge $A \subset T$ definieren:

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

Ist eine Norm gegeben, so wird durch sie stets eine Metrik induziert, indem man $d(x, y) := ||x - y||$ setzt.

Definition 3 (Cauchyfolge)**.** *In einem metrischen Raum (T,d) nennt man eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge :⇔*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} : \;\; d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m > N$$

Definition 4 (Vollständigkeit)**.** *Ein metrischer Raum wird vollständig genannt, wenn jede Cauchyfolge konvergiert, also einen Grenzwert hat, der im Raum ist.*

Definition 5 (Linearer Operator)**.** *Eine lineare Abbildung $L : X \to Y$ zwischen normierten Räumen wird linearer Operator genannt :⇔ L ist stetig ⇔ L ist beschränkt d.h. $\exists C > 0 : ||L(x)|| \leq C \cdot ||x|| \; \forall x \in X$.*

Definition 6 (Operatornorm)**.** *Für jeden linearen Operator L ist die Operatornorm*

$$||L|| := \sup_{||x|| \leq 1} ||L(x)||$$

definiert. Sie ist gleich der kleinsten Zahl C bezüglich derer L beschränkt ist.

A.2. Aus der Maßtheorie

Definition 1 (sigma-Algebra)**.** *Eine sigma-Algebra für eine Grundmenge X ist eine Familie von Mengen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ welche folgenden Axiomen genügt:*

$$\begin{aligned} &(A1) \;\; X \in \mathcal{A} \\ &(A2) \;\; A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A} \\ &(A3) \;\; (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Beispiel: Die Borelsche sigma-Algebra auf $\mathbb{R}$, welche die kleinste sigma-Algebra ist, die die offenen Mengen enthält.

Definition 2 (Maß)**.** *Ein Maß ist eine Abbildung auf einer sigma-Algebra $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, welche die leere Menge auf Null abbildet und sigma-additiv ist: Sind A_1, A_2,... disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$, so gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Ein Maß ist *isoton*, das heißt für Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ folgt aus $A \subset B$, dass $\mu(A) \leq \mu(B)$ und es ist *sigma-subadditiv*, das heißt für jede Folge von Mengen $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Definition 3 (Nullmenge)**.** *Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ wird Nullmenge genannt $:\Leftrightarrow \mu(N) = 0$*

Definition 4 (Lebesguemaß)**.** *Das Lebesguemaß λ ist definiert als das eindeutig bestimmte, translationsinvariante Maß auf $\mathbb{R}$ versehen mit der Borelschen sigma-Algebra zuzüglich jener Mengen, die zwischen maßgleichen Borelmengen liegen, welches dem Einheitsintervall die Länge Eins zuordnet.*

A.3. Aus der Topologie

Definition 1 (Topologie)**.** *Eine Topologie für T ist ein Mengensystem τ, welches folgenden Axiomen gehorcht:*

$$\begin{aligned} &(T1) \;\; \emptyset \in \tau \;\; \& \;\; T \in \tau \\ &(T2) \;\; O_1 \in \tau \;\; \& \;\; O_2 \in \tau \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau \\ &(T3) \;\; O_i \in \tau, \forall i \in I, I \text{ beliebige Indexmenge} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau \end{aligned}$$

Die Elemente der Topologie werden als offene Mengen, (T, τ) als topologischer Raum bezeichnet.
Beispiel: Die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^k$ induzierte Topologie:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^n}, \;\; x, y \in \mathbb{R}^k$$

Damit gilt für $O \subset \mathbb{R}^k$: O offen $\Leftrightarrow \forall x \in O \;\; \exists \epsilon > 0$: $\{y \in \mathbb{R}^k | d(x, y) < \epsilon\} \subset O$.

Sei im Folgenden (T, τ) ein topologischer Raum.

Definition 2 (Inneres)**.** *Das Innere von A$\subset$ T ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist:*

$$A^\circ := \cup\{O \subset A| \;\; O \in \tau\}$$

Ein Element aus A° wird dabei innerer Punkt genannt.

Das Innere ist gemäß Axiom T3 der Topologie offen.

Definition 3 (Umgebung)**.** *Eine Menge U heißt Umgebung von x* $:\Leftrightarrow$

$$\exists O \in \tau : x \in \;\; U \subset O$$

Beispiel: In einem metrischen Raum bezeichnet man mit $U_\delta(x)$ die Kugel um x mit Radius δ.

Definition 4 (Abgeschlossen)**.** *Eine Menge $A \subset T$ heißt abgeschlossen $:\Leftrightarrow A^C$ ist offen.*

Definition 5 (Abschluss)**.** *Der Abschluss von A in T ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält:*

$$\overline{A} := \cap\{B \supset A| \;\; B^C \in \tau\}$$

Die Abgeschlossenheit folgt dabei durch Komplementbildung in Axiom T3 der Topologie, damit sind beliebige Schnitte abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen.

Definition 6 (Berührpunkt)**.** *Ein Punkt $x \in A$ wird Berührpunkt von A genannt* $:\Leftrightarrow$ $x \in \overline{A}$

Damit gilt insbesondere $\overline{A} = \{x : \;\; x \text{ Berührpunkt von } A\}$ und es folgt, dass eine Menge genau dann abgeschlossen ist, wenn für jede Umgebung U eines Punktes aus A der Schnitt mit A nicht leer ist.

Definition 7 (Häufungspunkt)**.** *Ein Punkt $x \in T$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge $A \subset T$ $:\Leftrightarrow$ x ist Berührpunkt von $A \backslash \{x\}$.*

Definition 8 (Isolierter Punkt)**.** *Ein Punkt $x \in T$ heißt isolierter Punkt* $:\Leftrightarrow \{x\}^\circ = \{x\}$, *also $\{x\}$ offen in T ist.*

Definition 9 (Rand)**.** *Der Rand einer Menge $U \subset T$ ist definiert als der Abschluss abzüglich des Inneren:*

$$\partial U := \overline{U} \backslash U^\circ$$