Zentrum für Technomathematik
Fachbereich 3 – Mathematik und Informatik

Einführung des Drucks für die instationären Stokes–Gleichungen mittels der Methode von Kaplan

Michael Wolff

Report 01–09

Berichte aus der Technomathematik

Report 01–09 Juli 2001

Einführung des Drucks für die instationären Stokes-Gleichungen mittels der Methode von Kaplan

Michael Wolff [1]

1. Formulierung des Hauptresultats

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$.

Wir betrachten das instationäre (lineare) System der Stokes-Gleichungen in $\Omega \times \mathbb{R}$:

(1.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \operatorname{grad} p = f \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

(1.2) $$\operatorname{div} u = g \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

(1.3) $$u = u_\Gamma \qquad \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}.$$

Unser Hauptresultat (s. Punkt 4) lautet: Unter den Voraussetzungen

(1.4) $$f \in L^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^n)) + H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)),$$

(1.5) u_Γ besitze eine Fortsetzung

$$\tilde{u}_\Gamma \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)),$$

(1.6) $$g \in L^2(\mathbb{R}; H_p) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p') \qquad (H_p,\ V_p \text{ - siehe Punkt 4})$$

besitzt die Aufgabe (1.1) – (1.3) genau eine schwache Lösung (u, p) mit

(1.7) $$u \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)),$$

(1.8) $$p \in L^2(\mathbb{R}; H_p) + H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p)$$

sowie mit der Abschätzung

(1.9) $$\|u\| + \|p\| \leq c\,(\|f\| + \|\tilde{u}_\Gamma\| + \|g\|).$$

In (1.9) sind die entsprechenden Normen in den vorher angegebenen Räumen gemeint. Im laufenden Text werden die benötigten Räume näher definiert und abkürzende Bezeichnungen eingeführt.

Wir bemerken, daß der Druck p in (1.8) einen distributiven Anteil besitzt, deshalb ist eine einfache Einschränkung der Aufgabe auf ein endliches Zeitintervall nicht ohne weitere Voraussetzungen möglich.

Es ist bekannt (s. z.B. [3, 13, 14] und die dort zitierten Quellen), daß für die Aufgabe über einem endlichen Zeitintervall unter recht schwachen Voraussetzungen an die

---

[1] Michael Wolff, Universität Bremen (Germany), FB 3 (Mathematik, Zentrum für Technomathematik, mwolff@math.uni-bremen.de

rechten Seiten die eindeutige Existenz von u gesichert ist, daß aber über den Druck p keine Aussagen wie etwa in (1.8), (1.9) bewiesen werden konnten.
Bei stärkeren Voraussetzungen an die Regularität des Gebietes Ω ist es möglich, mit Hilfe der Potentialtheorie sehr gute Ergebnisse für Innen- und Außengebiete zu erhalten. Wir verweisen auf die Arbeiten [2, 4, 5, 10] und die dort zitierte Literatur.
Um die Schwierigkeiten bei der Einführung des Drucks und der Gewinnung einer Abschätzung der Art (1.9) im instationären Fall zu überwinden, beschreiten wir folgenden Weg:
Wir betrachten die instationäre Stokes-Aufgabe zuerst auf der ganzen reellen (Zeit-) Achse. Diese Aufgabe untersuchen wir mit einer von Kaplan [9] vorgeschlagenen Methode und fassen sie als ein Variationsproblem mit zwei Sesquilinearformen auf (Punkte 2 und 3), dabei ist es nötig, mit Räumem über $\mathbb{C}$ zu arbeiten. Wir benutzen funktionalanalytische Argumente. Dabei zeigt sich eine gewisse Analogie zur stationären Aufgabe (Vgl. z.B. [1, 6, 7]), allerdings in Räumen komplizierterer Struktur und mit größerem technischen Aufwand.
Mit stärkeren Voraussetzungen an die rechten Seiten läßt sich der distributive Anteil des Drucks eliminieren (Punkt 5).
Abschließend wenden wir die erhaltenen Resultate auf die entsprechende Aufgabe für ein endlichen Intervall $]0, T[$ an (Punkt 6).

2. Die Kaplan-Methode für eine abstrakte parabolische Gleichung

Seien $V \subset H$ separable Hilberträume über $\mathbb{C}$ mit stetiger und dichter Einbettung.
Die Skalarprodukte seien mit $(\cdot \mid \cdot)$ in H, $((\cdot \mid \cdot))$ in V, bezeichnet. Identifizieren wir H mit seinem Antidualem H', so erhalten wir das Evolutionstripel $V \subset H \subset V'$.
Dann definieren wir die Hilbert-Räume

$$\mathbb{H} := L^2(\mathbb{R}; H) \text{ und } \qquad \mathbb{V} := L^2(\mathbb{R}; V)$$

in der üblichen Weise mit den Skalarprodukten

$$(u \mid v)_{\mathbb{H}} := \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) \mid v(t))\, dt \text{und} \qquad (u \mid v)_{\mathbb{V}} := \int_{-\infty}^{+\infty} ((u(t) \mid v(t)))\, dt$$

Sei $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform, d.h.

(2.1) $\qquad \forall\, v \in \mathbb{V}$ ist $a(\cdot, v)$ linear, $\quad \forall\, u \in \mathbb{V}$ ist $a(u, \cdot)$ konjugiert-linear,

(2.2) $\qquad \forall\, u, v \in \mathbb{V}\ :\ |a(u, v)| \le M\, \|u\|_{\mathbb{V}} \|v\|_{\mathbb{V}} \qquad$ mit $0 < M < +\infty$.

Außerdem möge ein $m > 0$ existieren, so daß gilt

(2.3) $\forall u, v \in \mathbf{V}$: $|\mathrm{Re}\, a(u, u)| \geq m\, \|u\|_{\mathbf{V}}^2$.

Aus (2.1), (2.2) folgt dann die Existenz eines stetigen linearen Operators $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$

(2.4) $a(u, v) = (Au, v) \qquad \forall u, v \in \mathbf{V}$.

Hierbei ist (,) die Anti-Dualpaarung zwischen $\mathbf{V}'$ und $\mathbf{V}$. Wie bekannt, kann der Antiduale $\mathbf{V}'$ zu $\mathbf{V}$ mit $L^2(\mathbb{R}; V')$ identifiziert werden. Dann gilt

$$(u , v)_{\mathbf{V}',\mathbf{V}} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) , v(t))_{V',V}\, dt \qquad \forall u \in \mathbf{V}', \forall v \in \mathbf{V}.$$

(mit $\mathbf{V}'$:= antidualer Raum von $\mathbf{V}$, also Menge der auf $\mathbf{V}$ stetigen konjugiert-linearen Funktionale)

Für Funktionen $u \in \mathbf{H}$ mit kompaktem (Zeit-)Träger und endlich vielen Werten in H erklären wir die Fourier-Transformation üblicherweise mit

$$\mathfrak{F}(u)(\tau) := \hat{u}(\tau) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau}\, u(t)\, dt\, .$$

Mit der Standard-Procedur wird $\mathfrak{F}$ auf $\mathbf{H}$ erweitert, und wir erhalten

(2.5) $(\hat{u} \mid \hat{v})_{\mathbf{H}} = (u \mid v)_{\mathbf{H}} \qquad \forall u, v \in \mathbf{H}$. (Satz von Plancherel)

Wie bekannt, ist $\mathfrak{F} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ eine unitäre Bijektion.

Analog können wir auch die Fourier-Transfomation $\mathfrak{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definieren.

Wir definieren den Hilbert-Raum $\mathbf{W}$ vermöge

$$\mathbf{W} := H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, H) := \{ u \in \mathbf{H} : \int_{-\infty}^{+\infty} (1+ |\tau|)\, |\hat{u}(\tau)|_H^2\, d\tau < +\infty \},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u \mid v)_{\mathbf{W}} := \int_{-\infty}^{+\infty} (1+ |\tau|)\, (\hat{u}(\tau) \mid \hat{v}(\tau))_H\, d\tau\, .$$

Sei eine weitere Sesquilinearform $b : \mathbf{W} \times \mathbf{W} \to \mathbb{C}$ definiert mit:

(2.6) $$b(u, v) := \int_{-\infty}^{+\infty} i\tau\, (\hat{u}(\tau) \mid \hat{v}(\tau))_H\, d\tau\, .$$

Dann gelten offenbar:

(2.7) $|b(u, v)| \leq \|u\|_{\mathbf{W}}\, \|v\|_{\mathbf{W}} \qquad \forall u, v \in \mathbf{W}$, (2.8) $b(u, v) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial u}{\partial t}(t) \mid v(t))\, dt$, falls u differenzierbar mit kompaktem Träger.

(2.9) $b(v, u) = - \overline{b(u, v)} \quad \forall u, v \in \mathbf{W}.$

Die Form b erzeugt einen linearen stetigen Operator $B : \mathbf{W} \to \mathbf{W}'$ mit

(2.10) $b(u, v) = (Bu, v) \quad \forall u, v \in \mathbf{W}.$

Desweiteren definieren wir den H-Raum $\mathbf{X} := \mathbf{V} \cap \mathbf{W}$

mit dem Skalarprodukt:

$$(u \mid v)_{\mathbf{X}} := (u \mid v)_{\mathbf{V}} + \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau| \, (\hat{u}(\tau) \mid \hat{v}(\tau))_H \, d\tau .$$

Die stetige Einbettung $V \subset H$ und (2.5) sichern, daß dieses Skalarprodukt zu dem üblichen $(u \mid v)_{\mathbf{V}} + (u \mid v)_{\mathbf{W}}$ äquivalent ist.

In der üblichen Weise ist dann der Antiduale zu $\mathbf{X}$ mit

$$\mathbf{X}' := \mathbf{V}' + \mathbf{W}' = L^2(\mathbb{R}; V') + H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, H)$$

erklärt, wobei wir H mit H' und $L^2(\mathbb{R}; H)$ mit $(L^2(\mathbb{R}; H))'$ identifizieren.

Wir definieren nun die stetige Sesquilinearform e vermöge

(2.11) $e(u, v) := a(u, v) + b(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbf{X}.$

Damit wird ein Operator $E \in L(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ (d.h. $E : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ linear und stetig) durch

$$(Eu, v) := e(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbf{X} \quad \text{mit } Eu = Au + Bu$$

erklärt.

Sei nun $f \in \mathbf{X}'$. Wir betrachten die Operatorgleichung

(2.12) $Eu = Bu + Au = f.$

Diese ist zur Variationsgleichung

(2.13) $e(u, v) = b(u, v) + a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{X}$

äquivalent.

Satz 2.1. (Kaplan [9]) Die Sesquilinearform a erfülle die Bedingungen (2.1), (2.2) und (2.3), die Form b sei gemäß (2.6) definiert. Dann existiert für alle $f \in \mathbf{X}'$ genau eine Lösung $u \in \mathbf{X}$ der Aufgabe (2.12), die der Abschätzung

(2.14) $\|u\|_{\mathbf{X}} \le (1 + \frac{M+1}{m}) \|f\|_{\mathbf{X}'}$

genügt.

Beweis: Wir bemerken, daß die Form e auf $\mathbf{X}$ nicht stark postiv ist.

(i) Wir zeigen, daß der Wertebereich Ran E von E in $\mathbf{X}'$ dicht ist.

Sei also $v \in \mathbf{X}$ beliebig gewählt und es gelte:

$$(Eu, v) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{X}. \qquad \text{(D. h., } v \in {}^{\circ}\text{Ran E := Annihilator von Ran E)}$$

Wir setzen $u := v$ und erhalten wegen (2.9)

$$0 = \text{Re}\,(Ev, v) = \text{Re}\, e(v, v) = \text{Re}\, a(v, v),$$

also gilt $v = 0$ infolge von (2.3), also $\{0\} = {}^{\circ}$Ran E. Da $\mathbf{X}$ Hilbert-Raum ist, folgt hieraus die Dichtheit von Ran E.

(ii) Wir zeigen nun, daß E von unten beschränkt ist.

Dazu definieren wir die Operatoren

$$(\mathfrak{M}u)(t) := i\ \text{sign}(t)\ u(t), \qquad \forall u \in \mathbf{H} \qquad \text{und}$$

$$\mathfrak{P}u := \tilde{u} := (\mathfrak{F}^{-1} \circ \mathfrak{M} \circ \mathfrak{F})\, u \qquad \forall u \in \mathbf{H}.$$

Dann ist $\mathfrak{P}$ auf $\mathbf{H}$ und $\mathbf{V}$ linear, und es gelten:

$$\text{(2.15)} \qquad \|\tilde{u}\|_{\mathbf{V}} \le \|u\|_{\mathbf{V}} \qquad \forall u \in \mathbf{V},$$

$$\text{(2.16)} \qquad \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}} \le \|u\|_{\mathbf{H}} \qquad \forall u \in \mathbf{H}.$$

Aufgrund von (2.6) gilt dann auch

$$\text{(2.17)} \qquad b(u, \tilde{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|\, |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau \qquad \forall u \in \mathbf{H}.$$

Sei nun u eine Lösung von (2.13) für ein gewisses $f \in E(\mathbf{X}) \subset \mathbf{X}'$, $(E(\mathbf{X}) := \text{Ran E})$. Einsetzen von u für v in (2.13) ergibt dann unter Beachtung von (2.3) und (2.9):

$$\text{(2.18)} \qquad m\, \|u\|_{\mathbf{V}}^2 \le |\ \text{Re}\, a(u, u)\ | = |\ \text{Re}\, e(u, u)\ | = |\ \text{Re}\,(f, u)\ | \le |(f, u)| \le \|f\|_{\mathbf{X}'}\, \|u\|_{\mathbf{X}}.$$

Desweiteren wird $v := \tilde{u}$ in (2.13) eingesetzt, was infolge von (2.15), (2.16), (2.17) und (2.18) zu

$$\text{(2.19)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|\, |\hat{u}(\tau)|^2\, d\tau \le \|f\|_{\mathbf{X}'}\, \|\tilde{u}\|_{\mathbf{X}} + M\, \|u\|_{\mathbf{V}}\, \|\tilde{u}\|_{\mathbf{V}} \le \|f\|_{\mathbf{X}'}\, \|u\|_{\mathbf{X}} + \frac{M}{m}\, \|f\|_{\mathbf{X}'}\, \|u\|_{\mathbf{X}}$$

führt. Die Kombination von (2.18) und (2.19) liefert die Abschätzung (2.14) für $f \in E(\mathbf{X})$. Also ist E auf $E(\mathbf{X})$ stetig invertierbar, wegen der Dichtheit von $E(\mathbf{X})$ ist dann E ein Isomorphismus.

Bemerkung 2.2. Die Lösung der Aufgabe (2.12) im Sinne von Satz 2.1. kann als schwache Lösung der abstrakten parabolischen Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = f$$

auf der gesamten reellen Achse aufgefaßt werden. Dabei ist A ein elliptischer Operator.

Sei mit c_0 die Einbettungskonstante von V in H bezeichnet, dann gilt natürlich

(2.20) $$\|u\|_H^2 \le c_0^2 \|u\|_V^2.$$

Aus dem Beweis des Satzes 2.1. ergibt sich für die Lösung von (2.12) eine zusätzliche Abschätzung, die uns später wichtig ist.

Lemma 2.3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1. gilt für die Lösung $u \in \mathbb{X}$ der Aufgabe (2.12) die zusätzliche Abschätzung:

(2.21) $$\|u\|_W^2 \le (2M + 1 + 2c_0^2) \|u\|_V^2 + 2 \|f\|_{X'}^2,$$

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die Lösung von (2.11) reell ist.

Definition 2.4. Sei H ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$. Ein konjugiert-linearer Operator $J : H \to H$ heißt Involution, falls gelten

$J^2 = I$ (I := Identität)

$\forall x, y \in H$: $(Jx \mid Jy) = \overline{(x \mid y)}$

(„Verträglichkeit von J mit Skalarprodukt in H“).

Oft wird $J(x)$ auch mit $\overline{x}$ bezeichnet. Gilt $x = \overline{x}$, so nennen wir x reell (bezgl. J).

Lemma 2.5. Der Hilbert-Raum $\mathbb{X}$ über $\mathbb{C}$ besitze die Involution J.
Neben (2.1), (2.2), (2.3) und (2.6) mögen gelten:

(2.22) $a(u, v) = \overline{a(u, v)}$ $(\in \mathbb{R})$, $\forall u, v \in \mathbb{V}$ mit $u = Ju := \overline{u}$, $v = \overline{v}$.

Für $f \in \mathbb{X}'$ gelte

(2.23) $(f , v) = \overline{(f , v)}$, $\forall v \in \mathbb{X}$ mit $v = \overline{v}$.

Dann ist die nach Satz 2.1. existierende Lösung $u \in \mathbb{X}$ von (2.12) reell.

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß mit Hilfe von (2.8) leicht folgt

(2.24) $\quad b(u, v) = \overline{b(u, v)}\ (\in \mathbb{R}), \qquad \forall u, v \in \mathbf{W}$ mit $u = \overline{u},\ v = \overline{v}$.

Sei $u = x + iy$ Lösung von (2.12) mit x, y reell. Dann folgt aus (2.13)

$$b(x, v) + ib(y, v) + a(x, v) + ia(y, v) = (f, v) \qquad \forall v \in \mathbf{X}.$$

Wir wählen $v = \overline{v}$ und bilden von der vorstehenden Gleichung den Imaginärteil:

$$\frac{1}{2i}\left(b(x, v) - \overline{b(x, v)} \right) + \frac{1}{2i}\left(ib(y, v) - \overline{ib(y, v)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2i}\left(a(x, v) - \overline{a(x, v)} \right) + \frac{1}{2i}\left(ia(y, v) - \overline{ia(y, v)} \right) = 0$$

Aufgrund von (2.9), (2.22) und (2.24) folgt hieraus:

$$b(y, v) + a(y, v) = 0.$$

Wir wählen nun $v := y$ und erhalten (beachte (2.9) und (2.23)):

$a(y, y) = 0$, also gelten $y = 0$ und $x = u$, somit ist u reell.

Bemerkung 2.6. Existiert in H eine Involution, so existiert auch in $\mathbf{H}$ eine kanonische Involution. In vielen Anwendungen ist H ein Hilbert-Raum, der aus komplexwertigen Funktionen besteht. Somit ist die kanonische Involution die punktweise und ggf. komponentenweise übliche komplexe Konjugation und reell bedeutet dann reell im üblichen Sinn.

Wir wollen jetzt später benötigte Regularitätsresultate für eine Lösung von (2.12) beweisen. Die Bezeichnungen für die Räume bleiben wie bisher.

Die Sesquilinearform a habe nun die Darstellung

(2.25) $\quad a(u, v) := \int_{\mathbb{R}} \alpha(t, u(t), v(t))\, dt \qquad \forall u, v \in \mathbf{V}$,

wobei $\alpha : \mathbb{R} \times V \times V \to \mathbb{C}$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$ eine Sesquilinearform sei, die den Bedingungen

$$(2.26)\ \begin{cases} \alpha(\circ, u, v) & \text{ist meßbar } \forall\, u,v \in V, \\ |\alpha(t, u, v)| \le M\, \|u\|_V\, \|v\|_V & \\ |\mathrm{Re}\, \alpha(t, u, u)| \ge m\, \|u\|_V^2 & \text{f.f.a. } t \in \mathbb{R}, \forall\, u,v \in V,\ 0 < m \le M < +\infty \end{cases}$$

(m, M unabhängig von t, u, v) genügt.

Offenbar genügt dann die Form a den Bedingungen (2.1) - (2.3).

Wir erinnern an die Bezeichnung $(\delta_h u)(t) := u(t + h) - u(t)$ für $h \in \mathbb{R}$.

Satz 2.7. Die Form a erfülle (2.25) und (2.26).

(i) Sei $f \in \mathbf{X}'$ mit

(2.27) $\quad (f\,,\,v) = 0 \qquad \forall v \in \mathbf{X}$ mit $\quad v(t) = 0 \qquad$ f.f.a. $t > 0$.

Dann gilt für die Lösung $u \in \mathbf{X}$ der Aufgabe (2.12)

$$u(t) = 0 \qquad \text{f.f.a. } t < 0.$$

(ii) (Beschränktheit und Stetigkeit der Lösung mit Werten in H)

Sei $f \in \mathbf{V}' \cap H^{-s}(\mathbb{R}\,;H)$ $(\subset \mathbf{X}')$ für ein $0 < s < \frac{1}{2}$ und habe die Darstellung:

(2.28) $$(f\,,\,v) = \int_{\mathbb{R}} ((\,f_1(t)\,,\,v(t)\,))\,dt + \int_{\mathbb{R}} (\,\hat{f}_2(\tau)\,|\,\hat{v}(\tau)\,)\,d\tau \quad \forall v \in \mathbf{X}$$

mit $\qquad f_1 \in \mathbf{V}'$ und $f_2 \in H^{-s}(\mathbb{R}\,;H)$.

Dann gilt für die Lösung $u \in \mathbf{X}$ der Aufgabe (2.12)

(2.29) $$m \int_{-\infty}^{t} \|u(\tau)\|^2\,d\tau + |u(t)|^2 \le \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} \|f_1(\tau)\|_{V'}^2\,d\tau + c\,\|f_2\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R};\,H)} + \|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\,H)} \quad \text{f.f.a. } t \in \mathbb{R}$$

und

$$u \in L^\infty(\mathbb{R};\,H) \cap C(\mathbb{R};\,H).$$

Beweis: (i) Nach dem Satz von Lebesgue gilt offenbar

$$|u(t)|^2 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t}^{t+\varepsilon} |u(\tau)|^2\,d\tau \qquad \text{f.f.a. } t \in \mathbb{R}. \qquad (\,|\cdot|\ \text{- Norm in } H)$$

Seien $t \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, wir definieren die Lipschitz-stetige Schnittfunktion

$\rho(\tau) := \rho_{\varepsilon,t}(\tau)$

(2.30) $$\rho(\tau) := \begin{cases} 1, & \text{für } \tau \le t \\ -\frac{1}{\varepsilon}(\tau - t) + 1, & \text{für } t \le \tau \le t + \varepsilon \\ 0, & \text{für } t + \varepsilon \le \tau \end{cases}.$$

Es gilt die Beziehung (vgl. [9])

(2.31) $$\operatorname{Re} b(u,\,\rho u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t}^{t+\varepsilon} |u(\tau)|^2\,d\tau \qquad \forall u \in \mathbf{W}.$$

Aus der Gleichung (2.13) erhalten wir

$$\operatorname{Re} b(u,\,\rho u) + \operatorname{Re} a(u,\,\rho u) = \operatorname{Re}(f\,,\,\rho u), \quad \text{also}$$

(2.32) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varepsilon,t}(\tau) \operatorname{Re} \alpha(\tau,\,u(\tau),\,u(\tau))\,d\tau + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t}^{t+\varepsilon} |u(\tau)|^2\,d\tau = \operatorname{Re}(f\,,\,\rho u).$$

Zum Beweis der ersten Aussage des Lemmas setzen wir $t < 0$ und $\varepsilon > 0$ so, daß

$t + \varepsilon < 0$. Dann gilt $\rho u = 0$ f.f.a. $t > 0$ und unter Beachtung von (2.27) folgt nach dem Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ aus (2.32) die Behauptung.

(ii) Zum Beweis der zweiten Aussage benutzen wir die Darstellung von f gemäß (2.28). So folgt für $f_1 \in \mathbb{V}'$

$$(2.33)\qquad (f_1 , \rho u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1(\tau) , \rho(\tau)u(\tau))_{V'V}\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, (f_1(\tau) , u(\tau))_{V'V}\, d\tau.$$

Gestützt auf einem Argument in [12] gilt die Abschätzung

$$(2.34)\qquad \|\rho u\|^2_{H^s(\mathbb{R};\, H)} \leq c\, \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R};\, H)} + \frac{1}{\varepsilon^{2s}} \int_t^{t+\varepsilon} |u(r)|^2\, dr$$

wobei c *nicht* von ε abhängt.

Zusammenfassend folgt aus (2.28), (2.32), (2.33), (2.34)

$$(2.35)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, \mathrm{Re}\, \alpha(\tau, u(\tau), u(\tau))\, d\tau + \frac{1}{2\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} |u(\tau)|^2\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, (f_1(\tau) , u(\tau))_{V'V}\, d\tau + c\, \|f_2\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R};\, H)} + \|u\|^2_{H^s(\mathbb{R};\, H)} + \frac{1}{c\varepsilon^{2s}} \int_t^{t+\varepsilon} |u(r)|^2\, dr$$

Der Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ ist jetzt korrekt, und einfache Abschätzungen ergeben (2.29) und $u \in L^\infty(\mathbb{R}; H)$.

Die Stetigkeit folgt aus nachfolgenden Überlegungen:

Wir testen die Variationsgleichung (2.13) mit $\delta_{-h}\varphi$, wobei $\varphi \in \mathbb{X}$ beliebig gewählt wird, und wiederholen die vorigen Argumente. Es ergibt sich

$$(2.36)\quad b(\delta_h u, \varphi) + \int_{\mathbb{R}} \alpha(t, \delta_h u, \varphi)\, dt = -\int_{\mathbb{R}} (\alpha(t + h, u(t + h), \varphi(t)) - \alpha(t, u(t + h), \varphi(t)))\, dt +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} ((\delta_h f_1(t) , \varphi(t)))\, dt + \int_{\mathbb{R}} (\delta_h \hat{f}_2(\tau) \mid \hat{\varphi}(\tau))\, d\tau.$$

Im nächsten Schritt wählen wir $\varphi := \rho_{\varepsilon,t}\, \delta_h u$, wobei $\rho_{\varepsilon,t}$ die durch (2.30) definierte Schnittfunktion ist. Von der erhaltenen Identität nehmen wir den Realteil und erhalten mit den gleichen Argumenten, die zu (2.35) führten,

$$(2.37)\qquad \int_{\mathbb{R}} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, \mathrm{Re}\, \alpha(\tau, (\delta_h u)(\tau), (\delta_h u)(\tau))\, d\tau + \frac{1}{2\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} |(\delta_h u)(\tau)|^2\, d\tau \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, |\, \alpha(\tau + h, u(\tau + h), (\delta_h u)(\tau)) - \alpha(\tau, u(\tau + h), (\delta_h u)(\tau))\, |\, d\tau + c\, \|\delta_h f_2\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R};\, H)} +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} \rho_{\varepsilon,t}(\tau)\, |\, (((\delta_h f_1)(\tau)\,,\, (\delta_h u)u(\tau)))\, |\, d\tau + \ \|\delta_h u\|^2_{H^s(\mathbb{R};\, H)} + \frac{1}{c\varepsilon^{2s}} \int_t^{t+\varepsilon} |\delta_h u(r)|^2\, dr$$

Mit Standard-Tricks und Grenzübergang für $\varepsilon \to 0$ gelangen wir zu

$$\text{(2.38)} \qquad m \int_{-\infty}^{t} \|(\delta_h u)(\tau)\|^2\, d\tau + |(\delta_h u)(t)|^2 \le \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{t} \|\delta_h f_1(\tau)\|^2_{V'}\, d\tau + c\, \|\delta_h f_2\|^2_{H^{-s}(\mathbb{R};\, H)} +$$

$$+ \|\delta_h u\|^2_{H^s(\mathbb{R};\, H)} + c \int_{-\infty}^{t} |\, \alpha(\tau + h,\, u(\tau + h),\, (\delta_h u)(\tau)) - \alpha(\tau,\, u(\tau + h),\, (\delta_h u)(\tau))\, |\, d\tau \quad \text{f.f.a. } t \in \mathbb{R}$$

Das letzte Integral in (2.38) läßt sich abschätzen durch

$$2\, c\, M \left(\int_{-\infty}^{t} \|\, u(\tau + h)\, \|\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{t} \|\, (\delta_h u)(\tau)\, \|\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le c\, \|u\|_{\mathbb{V}} \|\delta_h u\|_{\mathbb{V}} \le c\, \|\delta_h u\|_{\mathbb{V}}.$$

Für $h \to 0$ gehen $\|\delta_h u\|_{\mathbb{V}}$ sowie die anderen Terme auf der rechten Seite in (2.38) wegen der Stetigkeit im Mittel gegen 0, und somit ist $u \in C(\mathbb{R}; H)$.

Für die abstrakte Situation wollen wir noch ein weiteres, später benötigtes Regularitätsresultat angeben.

Die Sesquilinearform a habe nun die Darstellung

$$\text{(2.39)} \qquad a(u, v) := \int_{\mathbb{R}} \alpha(u(t), v(t))\, dt \qquad \forall u, v \in \mathbb{V},$$

wobei $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ eine von $t \in \mathbb{R}$ unabhängige Sesquilinearform sei, die den Bedingungen

$$\text{(2.40)} \qquad |\alpha(u, v)| \le M\, \|u\|_V\, \|v\|_V$$

$$|\mathrm{Re}\ \alpha(u, u)| \ge m\, \|u\|^2_V \qquad \forall u, v \in V,\ 0 < m \le M < +\infty,$$

$$\text{(2.41)} \qquad \alpha(u, v) = \qquad \forall u, v \in V$$

genügt. Offenbar genügt dann die Form a den Bedingungen (2.1) - (2.3).

Mit Standard-Argumenten wie Testen mit Steklov-Mitteln und Differenzenquotienten erhalten wir das folgende Resultat.

Satz 2.8. Es sei $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform, die den Bedingungen (2.39), (2.40) und (2.41) genügt. Die Form b sei gemäß (2.6) definiert.

Außerdem sei

$$f \in L^2(\mathbb{R}; H) + H^1(\mathbb{R}; V').$$

Dann gelten für die nach Satz 2.1. existierende Lösung $u \in \mathbb{X}$ der Aufgabe (2.12)

(2.42) $\quad u \in H^1(\mathbb{R}; H), \qquad Bu = u'$

sowie die Abschätzung

(2.43) $\quad ||u'||^2_{L^2(\mathbb{R}; H)} \leq ||f^{(1)}||^2_{L^2(\mathbb{R}; H)} + 4\, ||f^{(2)}||_{H^1(\mathbb{R}; V')}\, ||u||_{L^2(\mathbb{R}; V)}$

3. Ein Variationsproblem mit zwei Sesquilinearformen

Wir übertragen hier ein bekanntes Variationsproblem für zwei Bilinearformen (vgl. z.B. [1]) auf Sesquilinearformen, um in der Anwendung mit der Form $e := a + b$ aus (2.11) zu arbeiten.

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Hilbert-Räume über $\mathbb{C}$, seien $e : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform und $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sowie $\mathcal{Z} := \operatorname{Ker} L \subset \mathcal{X}$.

Für die Sesquilinearform e gelte:

(3.1) $\quad \forall\, f \in \mathcal{X}' \quad \exists!\, u \in \mathcal{Z} \quad : \quad e(u, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in \mathcal{Z}.$

($\mathcal{X}'$ - antidualer Raum zu $\mathcal{X}$, $(\cdot\, ,\, \cdot)$ - Antidualpaarung zwischen $\mathcal{X}'$ und $\mathcal{X}$)

Wir notieren, daß aus dem Satz von Banach aus (3.1) die Abschätzung

(3.2) $\quad ||u||_{\mathcal{X}} \leq c\, ||f||_{\mathcal{X}'}$

folgt. Für den Operator L möge gelten:

(3.3) $\quad \exists\, \beta > 0 \quad : \quad \beta\, ||p||_{\mathcal{Y}'} \leq \sup\limits_{w \in \mathcal{X}-\{0\}} \dfrac{(p\, ,\, Lw)}{||w||_X} \quad \forall\, p \in \mathcal{Y}'.$

Satz 3.1. Seien $f \in \mathcal{X}'$ und e und L erfüllen die Bedingungen (3.1) bzw. (3.2). Dann besitzt die Aufgabe

(3.4) $\quad e(u, v) + (p\, ,\, Lv) = (f\, ,\, v) \quad \forall\, f \in \mathcal{X}',$

(3.5) $\quad (q\, ,\, Lu) = 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{Y}'$

genau eine Lösung $(u, p) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}'$. Überdies gelten die Abschätzungen

(3.6) $\quad ||u||_{\mathcal{X}} \leq c\, ||f||_{\mathcal{X}'},$

(3.7) $\quad ||p||_{\mathcal{Y}'} \leq \dfrac{1}{\beta}\, (\, ||u||_{\mathcal{X}} + ||f||_{\mathcal{X}'})$

mit c von f und u unabhängig.

Beweis: Wegen (3.1) existiert genau ein $u \in \mathcal{Z}$ mit $\quad e(u, v) = (f\, ,\, v) \quad \forall\, v \in \mathcal{Z}.$

Weiter gilt (3.2). Betrachten die Aufgabe

(3.8) $\quad (p\, ,\, Lv) = (f\, ,\, v) - e(u, v) =: (\tilde{f}\, ,\, v) \quad \forall\, v \in \mathcal{X}.$

Klar, $(\tilde{f}\ , v) = 0 \qquad \forall\ v\in \mathbf{Z}$.

Aus der Bedingung (3.3) folgt, daß eine mögliche Lösung $p\in \mathbf{Y}'$ einzig ist.

Offenbar ist $\mathbf{X} = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^\perp$ und es genügt, die Aufgabe (3.8) für $v\in \mathbf{Z}^\perp$ zu betrachten.

Für jedes $p\in \mathbf{Y}'$ ist die Abbildung $v \to (p\ , Lv)$ stetig und konjugiert-linear auf $\mathbf{Z}^\perp$.

Also existiert nach dem Satz von Riesz genau ein $Tp\in \mathbf{Z}^\perp$ mit

$$(Tp \mid v) = (p\ , Lv) \qquad v\in \mathbf{Z}^\perp.$$

Hieraus folgt $T\in L(\mathbf{Y}', \mathbf{X})$ mit $\|T\| \le \|L\|$; außerdem ist T wegen (3.3) injektiv.

Wir bezeichnen $\mathbf{R} := \operatorname{Ran} T\ (\subset \mathbf{Z}^\perp)$ und zeigen die Gleichheit $\mathbf{R} = \mathbf{Z}^\perp$.

Zeigen zuerst die Abgeschlossenheit von $\mathbf{R}$.

Sei (p_j) eine Folge in $\mathbf{Y}'$ mit $Tp_j \to w\in \mathbf{Z}^\perp$.

Da (Tp_j) eine Cauchy-Folge ist, folgt mittels der Bedingung (3.3), daß auch (p_j) eine Cauchy-Folge ist, also $p_j \to q$ und somit $Tp_j \to Tq = w$.

Zeigen nun $\mathbf{R} = \mathbf{Z}^\perp$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathbf{R}$ gilt $\mathbf{Z}^\perp = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^\perp$.

Wählen $v\in \mathbf{R}^\perp$, dann ist

$$(p\ , Lv) = (Tp \mid v) = 0 \qquad \forall\ p\in \mathbf{Y}'$$

wegen $Tp\in \mathbf{R}$.

Also ist $v\in \operatorname{Ker} L =: \mathbf{Z}$. Nach Wahl ist aber $v\in \mathbf{R}^\perp \subset \mathbf{Z}^\perp$, somit sind $v = 0$ und $\mathbf{R} = \mathbf{Z}^\perp$.

Nach dem Satz von Banach ist dann $T : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Z}^\perp$ ein Homöomorphismus.

Nach dem Satz von Riesz existiert zu $\tilde{f}\in (\mathbf{Z}^\perp)'$ genau ein $w\in \mathbf{Z}^\perp$ mit

$$(\tilde{f}\ , v) = (w \mid v) \qquad \forall\ v\in \mathbf{Z}^\perp.$$

Überdies gilt natürlich $\|w\|_{\mathbf{X}} = \|\tilde{f}\|_{\mathbf{X}'}$.

Dann erfüllt $\hat{p} := T^{-1}w \in \mathbf{Y}'$

$$(3.9) \qquad (\tilde{f}\ , v) = (w \mid v) = (T\hat{p} \mid v) = (\hat{p}\ , Lv) \qquad \forall\ v\in \mathbf{Z}^\perp,$$

also ist $\hat{p} \in \mathbf{Y}'$ Lösung von (3.6). Weiter gilt, da T Homöomorphismus,

$$\|\hat{p}\|_{\mathbf{Y}'} \le \|T^{-1}\|\ \|w\|_{\mathbf{X}} \le \|T^{-1}\|\ \|\tilde{f}\|_{\mathbf{X}'} \le \|T^{-1}\|\ (\ \|u\|_{\mathbf{X}} + \|f\|_{\mathbf{X}'}\ ).$$

Aus (3.3) und (3.9) folgt die Abschätzung der Norm von T^{-1} durch $\frac{1}{\beta}$.

Bemerkung 3.2. Satz 3.1. ist übertragbar auf den inhomogenen Fall, indem für gegebenes $g\in \mathbf{Y}$ anstelle von (3.5) gefordert wird

(3.10) $(q\,,\, Lu) = (q\,,\, g)$ $\quad \forall\, q \in \mathbf{Y}'$.

Falls ein $u_0 \in \mathbf{X}$ existiert mit $Lu_0 = g$, so läßt sich die Aufgabe (3.4), (3.10) durch Homogenisieren auf die Aufgabe (3.4), (3.5) zurückführen.

4. Anwendung auf instationäre Stokes-Gleichungen

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\Gamma := \partial\Omega$.

Wir betrachten das instationäre (lineare) System der Stokes-Gleichungen in $\Omega \times \mathbb{R}$:

(4.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \operatorname{grad} p = f \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

(4.2) $$\operatorname{div} u = g \qquad \text{in } \Omega \times \mathbb{R},$$

(4.3) $$u = u_\Gamma \qquad \text{auf } \Gamma \times \mathbb{R}.$$

Jetzt definieren wir Spezialisierungen für die vorher eingeführten Räume:

$$V := H_0^1(\Omega;\, \mathbb{C}^n), \qquad H := L^2(\Omega;\, \mathbb{C}^n) \qquad \text{mit den Skalarprodukten:}$$

$$((u \mid v)) := \int_\Omega \nabla u\, \nabla \overline{v}\, dx \qquad \text{und} \qquad (u \mid v) := \int_\Omega u\, \overline{v}\, dx.$$

Hierbei ist mit $\overline{v} = \overline{v(x,\, t)}$ die übliche Konjugation einer komplexen Zahl bzw. eines aus komplexen Zahlen bestehenden Vektors oder Matrix zu verstehen.

Die Hilbert-Räume $\mathbf{H}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ ergeben sich wie zu Beginn des Punktes 2 mit den jetzt konkreten Räumen V und H, also:

$$\mathbf{H} := L^2(\mathbb{R};\, L^2(\Omega;\, \mathbb{C}^n)), \qquad \mathbf{V} := L^2(\mathbb{R};\, H_0^1(\Omega;\, \mathbb{C}^n)),$$

$$\mathbf{W} := H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, L^2(\Omega;\, \mathbb{C}^n)) \qquad \mathbf{X} := \mathbf{W} \cap \mathbf{V} = H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, L^2(\Omega;\, \mathbb{C}^n)) \cap L^2(\mathbb{R};\, H_0^1(\Omega;\, \mathbb{C}^n)),$$

$$\mathbf{X}' := \mathbf{W}' + \mathbf{V}' = H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, L^2(\Omega;\, \mathbb{C}^n)) + L^2(\mathbb{R};\, H^{-1}(\Omega;\, \mathbb{C}^n)).$$

In kanonischer Weise sind dann in diesen Räumen Involutionen erklärt, die mit den Skalarprodukten verträglich sind. Desweiteren definieren wir die Hilbert-Räume:

$$V_p := \{\, u \in H^1(\Omega;\, \mathbb{C}) \mid \int_\Omega u\, dx = 0 \,\}, \qquad V_p' := \text{antidualer Raum zu } V_p,$$

$$H_p := \{\, u \in L^2(\Omega;\, \mathbb{C}) \mid \int_\Omega u\, dx = 0 \,\}, \qquad H_p' \text{ sei mit } H_p \text{ identifiziert;}$$

$$\mathbf{Y} := L^2(\mathbb{R};\, H_p) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, V_p'), \qquad \text{woraus dann folgt}$$

$$\mathbf{Y}' = L^2(\mathbb{R};\, H_p) + H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, V_p)$$

Die Form b sei gemäß (2.6) für $u, v \in \mathbf{W}$ definiert. Die Form a sei gemäß

(4.4) $$a(u, v) := \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Omega} \nabla u \, \nabla \overline{v} \, dx \, dt$$

auf $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definiert und genügt dann den Eigenschaften (2.1) - (2.3) mit $M = m = 1$. Desweiteren sei $e := b + a$ wie in (2.11).

Bemerkung 4.1. Es wäre möglich, nach entsprechender Homogenisierung den Satz 2.1. für die "divergenzfreien" Entsprechungen der Räume $\mathbf{H}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'$ anzuwenden, um die Existenz einer schwachen Lösung von (4.1) - (4.3) zu erhalten. Wir hätten damit jedoch keine befriedigenden Informationen über den Druck p.

Deshalb wollen wir das instationäre Stokes-System (4.1) - (4.3) als geeignetes Variationsproblem mit zwei Sesquilinearformen formulieren und lösen.
Wir definieren den Operator $L : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$
vermöge

(4.5) $$(p\, , Lu) := -\int_{-\infty}^{+\infty} (p_1 \mid \operatorname{div} u)\, dt \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F} p_2 \mid \mathfrak{F} u)\, dt$$

für $p \in \mathbf{Y}'$ mit $p = p_1 + p_2$, $p_1 \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$, $p_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p)$, $u \in \mathbf{X}$.

Hierbei verwenden wir die Bezeichnungen

$$\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^i}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{grad} p := \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x_n} \right).$$

Lemma 4.2. Für den durch (4.5) definierten Operator L gelten:

(i) $L \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ mit $\|L\| \le \sqrt{n}$.

(ii) Für $\mathbf{Z} := \operatorname{Ker} L$ gilt: $\mathbf{Z} = \{ v \in \mathbf{X} \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \times \mathbb{R} \}$

Beweis: (i) Aus der Beziehung (4.5) und den Eigenschaften der Fourier-Transformation auf Distributionen aus $H^{-\frac{1}{2}}$ folgen die Korrektheit der Definition von L sowie die Behauptungen durch Standardabschätzungen.
Die Definition von L ist auch von der Darstellung von p unabhängig, da

$$L^2(\mathbb{R}; H_p) \cap H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p) \supset L^2(\mathbb{R}; V_p) \qquad \text{dicht.}$$

(ii) Sei $u \in \mathcal{Z}$, dann ist $\quad (p\,,\, Lu) = 0 \;\; \forall\, p \in \mathcal{Y}'$, somit gilt auch

$$(4.6) \qquad 0 = -\int_{-\infty}^{+\infty} (p \mid \operatorname{div} u)\, dt \qquad \forall\, p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$$

Für beliebiges $p \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}))$ setzen wir

$$p_\Omega(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p(x, t)\, dx,$$

dann gelten

$$p_\Omega \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C})) \;\; \text{und} \quad p - p_\Omega \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$$

und aus (4.6) folgt $\qquad \operatorname{div} v = 0$ f.ü. in $\Omega \times \mathbb{R}$.

Sei nun $u \in \{\, v \in \mathcal{X} \mid \operatorname{div} v = 0 \text{ f.ü. in } \Omega \times \mathbb{R} \,\}$. Dann gilt

$$(4.7) \qquad (p\,,\, Lu) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \mid \mathfrak{F}\, u)\, dt$$

$$\forall\, p \in \mathcal{Y}' \;\; \text{mit} \;\; p = p_1 + p_2, \;\; p_1 \in L^2(\mathbb{R}; H_p), \;\; p_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p).$$

Wählen eine Folge (p_{2k}) in $L^2(\mathbb{R}; V_p)$ mit $p_{2k} \to p_2$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p)$ und bezeichnen $p_k := p_1 + p_{2k}$. Dann erhalten wir mit Standardargumenten aus (4.7):

$$(4.8) \quad (p_k\,,\, Lu) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_{2k} \mid \mathfrak{F}\, u)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathfrak{F} \operatorname{grad} p_{2k} \mid \mathfrak{F}\, u)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} p_{2k} \mid u)\, dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} (p_{2k} \mid \operatorname{div} u)\, dt = 0.$$

Der Grenzübergang für $k \to \infty$ in (4.8) liefert $u \in \operatorname{Ker} L = \mathcal{Z}$.

Bemerkung 4.3. Der Operator L ist eine Verallgemeinerung des Divergenzoperators, als Abbildung von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$.

Die folgenden Aussagen über den Operator L sind fundamental für die weitere Behandlung der Aufgabe (4.1) - (4-3).

Lemma 4.4. Für den gemäß (4.5) definierten Operator L gelten die Aussagen:

(i) $\quad \forall\, g \in \mathcal{Y} \qquad \exists!\, u \in (\operatorname{Ker} L)^\perp \subset \mathcal{X} \quad : \qquad Lu = g$

dabei gilt der Abschätzung

(4.9) $$||u||_{\mathbf{X}} \le \tilde{c}\ ||g||_{\mathbf{Y}},$$

wobei $\tilde{c} := \max\{ c_\Omega, \sqrt{1 + c_1}\}$ mit $(c_1)^{-1} := \int_{\mathbb{R}} \frac{2(1 - \cos(t))}{t^2}\, dt$

und c_Ω hängt nur vom Gebiet Ω ab.

(ii) Der Operator L genügt der Abschätzung (3.3) mit der Konstanten $\beta := \tilde{c}^{\,-1}$.

Beweis: (i) Sei $g \in \mathbf{Y}$ gegeben, betrachten die Gleichung

(4.10) $$(p\ , Lu) = (p\ , g) \qquad \forall\ p \in \mathbf{Y}'.$$

Wir testen (4.10) mit

$$p - p_\Omega \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$$

für beliebiges $p \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}))$ $\quad \left(p_\Omega(t) := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega p(x, t)\, dx \right)$

und erhalten

(4.11) $$-\operatorname{div} u(t) = g(t) \qquad \text{in } \Omega,\ \text{ f.f.a. } t \in \mathbb{C}.$$

Es ist bekannt (vgl. z.B. [6, 7 13] für reellwertige Größen; bei komplexen Größen separate Betrachtung für Real- und Imaginärteile), daß für die $t \in \mathbb{R}$, für die (4.11) Sinn macht, genau ein

$$u(t) \in V \cap (\operatorname{Ker} \operatorname{div})^\perp \qquad \text{existiert mit}$$

$$||u(t)||_V \le c_\Omega\ ||g(t)||_{L^2(\Omega,\, \mathbb{C})} = c_\Omega\ ||\operatorname{div} u(t)||_{L^2(\Omega,\, \mathbb{C})}.$$

Die Konstante c_Ω ist im reellen wie komplexen Fall gleich und hängt nur von Ω ab.

Somit folgt

(4.12) $$u \in \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad ||u||_{\mathbf{V}} \le c_\Omega\ ||g||_{L^2(\mathbb{R};\, H_p)}.$$

Aus (4.11) erhalten wir f.f.a. $t \in \mathbb{R}$ für dieses u:

(4.13) $$\int_\Omega u(x, t)\, \overline{\nabla\varphi}\, dx = \int_\Omega g(x, t)\, \overline{\varphi}\, dx = (g(t)\ , \varphi)_{V_p', V_p} \quad \forall\ \varphi \in V_p$$

da $V_p \subset H_p \subset V_p'$ ein Raumtripel ist.

Nach dem Satz von Riesz existiert zu $g(t) \in V_p'$ (f.f.a. t) genau ein $w(t) \in V_p$ mit

(4.14) $$(g(t)\ , \varphi)_{V_p', V_p} = (w(t) \mid \varphi) = \int_\Omega \nabla w(x, t)\, \overline{\nabla\varphi}\, dx \qquad \forall\ \varphi \in V_p.$$

Außerdem gilt die Abschätzung

(4.15) $$||w(t)||_{V_p} = ||g(t)||_{V_p'}$$

Wegen der Einzigkeit von u und w folgt aus (4.13) und (4.14)

(4.16) $\quad u(t) = \nabla w(t) \quad$ und $\quad \|u(t)\|_{L^2(\Omega, \star^n)} = \|g(t)\|_{V_p'} \quad$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$.

Aus (4.14) folgt dann für f.a. $t, s \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\int_\Omega (\nabla w(t) - \nabla w(s))\, \nabla\bar{\varphi}\, dx = (g(t) - g(s), \varphi) \qquad \forall \varphi \in V_p.$$

Jetzt setzen wir $\varphi := w(t) - w(s)$, was zu

$$\| w(t) - w(s) \|_{V_p}^2 \le \| g(t) - g(s) \|_{V_p'}^2$$

führt. Nach Voraussetzung an g gilt (Vgl. z.B. [8]):

$$\|g\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, V_p')} = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, V_p')} + c_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |t - s|^{-2}\, \| g(t) - g(s) \|^2_{V_p'}\, dt\, ds < \infty$$

mit $\quad (c_1)^{-1} := \int_{\mathbb{R}} \frac{2(1 - \cos(t))}{t^2}\, dt.$

Also folgt $u \in \mathbf{W}$ mit

$$\|u\|_{\mathbf{W}} \le \sqrt{1 + c_1}\, \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R};\, V_p')}$$

und unter Beachtung von (4.12) erhalten wir die Aussage (4.9).

(ii) Sei $p \in \mathbf{Y}'$, wählen $\tilde{p} := Rp$, wobei $R : \mathbf{Y}' \to \mathbf{Y}$ der Rieszsche Operator ist.

Dann gilt

(4.17) $\quad (p\,,\, \tilde{p}) = (Rp \mid \tilde{p}) = (\tilde{p} \mid \tilde{p}) = \|\tilde{p}\|^2 = \|p\|^2.$

Um die Abschätzung (3.3) zu zeigen genügt es somit, die Aussage (i) in Anspruch zu nehmen:

Zu $\tilde{p} \in \mathbf{Y}$ existiert genau ein $u \in (\mathrm{Ker}\, L)^\perp$ mit $Lu = \tilde{p}$ und $\|u\| \le \tilde{c}\, \|\tilde{p}\|$.

Dann folgt (3.3) mit $\beta := \tilde{c}^{\,-1}$.

Wir setzen jetzt folgende Bedingungen für die rechten Seiten voraus:

(4.18) $\quad f \in \mathbf{X}'$,

(4.19) $\quad u_\Gamma$ besitze eine Fortsetzung

$$\tilde{u}_\Gamma \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)),$$

(4.20) $\quad g \in \mathbf{Y}$.

Wir definieren eine schwache Lösung der Aufgabe (4.1) - (4.3).

Definition 4.5. Seien (4.18), (4.19), (4.20) gegeben. Ein Paar

$$(u, p) \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)) \times \mathbf{Y}'$$

heißt schwache Lösung der Aufgabe (4.1) - (4.3), falls

(4.21) $\quad b(u, v) + a(u, v) + (p , Lv) = (f , v) \qquad \forall\, v \in \mathbf{X},$

(4.20) $\quad (q , Lu) = (q , g) \qquad \forall\, q \in \mathbf{Y}',$

(4.21) $\quad u = u_\Gamma \qquad$ auf $\Gamma \times \mathbb{R}$.

Die Funktion p nennen wir Druck.

Die üblichen Standardschritte und die Charakterisierung des Kerns von L gemäß Lemma 4.2. (ii) ergeben:

Lemma 4.6. (Homogenisierung) Seien (4.18), (4.19), (4.20) gegeben und sei $u_g \in \mathbf{X}$ mit $Lu_g = g - L\tilde{u}_\Gamma$ gemäß Lemma 4.4. (i). Das Paar

$$(u, p) \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)) \times \mathbf{Y}'$$

ist genau dann schwache Lösung der Aufgabe (4.1) - (4.3), wenn für das Paar

$$(w, p) \in L^2(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)) \times \mathbf{Y}'$$

gelten:

(4.22) $\quad u = w + u_g + \tilde{u}_\Gamma,$

(4.23) $b(w, v) + a(w, v) + (p , Lv) = (f , v) - b(\tilde{u}_\Gamma, v) - a(\tilde{u}_\Gamma, v) - b(u_g, v) - a(u_g, v) =:$

$=: (\tilde{f} , v) \qquad \forall\, v \in \mathbf{X},$

(4.24) $\quad \operatorname{div} w = 0 \qquad$ f.ü. in $\Omega \times \mathbb{R}$.

Satz 4.7. (Existenz und Einzigkeit der schwachen Lösung) Seien (4.18), (4.19), (4.20) gegeben. Dann besitzt die Aufgabe (4.1) - (4.3) genau eine schwache Lösung

$$(u, p) \in L^2(\mathbb{R}; H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)) \cap H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)) \times \mathbf{Y}'$$

mit $u = w + u_g + \tilde{u}_\Gamma$ und es gelten die Abschätzungen:

(4.25) $\quad \|u\|_{\mathbf{X}} \le (3\|f\|_{\mathbf{X}'} + (4 + 4\tilde{c}\sqrt{n})\, \|\tilde{u}_\Gamma\|_{\mathbf{X}} + 4\tilde{c}\, \|u_g\|_{\mathbf{Y}})$

(4.26) $\quad \|p\|^2_{\mathbf{Y}'} \le 2\tilde{c}^2\, ((8 + 2c_0^2)\|w\|^2_{\mathbf{V}} + 3\|\tilde{f}\|^2_{\mathbf{X}'}) \qquad (\tilde{f}$ aus (4.23)).

(Dabei ist $\tilde{c}$ gemäß (4.9), und c_0 ist die Einbettungskonstante von $H_0^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ in $L^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$.)

Beweis: Wir starten mit dem in Lemma 4.6. formulierten homogenisierten Problem. Die Form $e := a + b$ gemäß (2.11), (2.6), (4.4) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.1. mit dem Raum $\mathsf{Z} := \mathrm{Ker}\, L$ anstelle von X. Dabei gilt die Abschätzung

(4.27) $\qquad \|w\|_{\mathsf{X}} \leq 3\, \|\tilde{f}\|_{\mathsf{X}'}$.

Zu diesem w existiert nach Satz 3.1. genau ein $p \in \mathsf{Y}'$ und nach (3.7) und Lemma 4.4. gilt

(4.28) $\qquad \|p\|_{\mathsf{Y}'} \leq \tilde{c}\, (\|w\|_{\mathsf{X}} + \|\tilde{f}\|_{\mathsf{X}'})$.

Unter Berücksichtigung von Lemma 2.3. und der Definition von $\tilde{f}$ in (4.23) sowie (4.9) folgen die behaupteten Abschätzungen.

5. Bessere Regularität des Drucks

Für weitere Anwendungen – insbesondere für eine Einschränkung auf ein endliches Zeitintervall - wäre es wünschenswert, die Funktion p (nur) aus $L^2(\mathbb{R}; H_p)$ zu erhalten und eine geeignete Abschätzung zu beweisen.
Dazu ist es notwendig, den zu L gemäß (4.5) adjungierten Operator zu untersuchen und die konkrete Gestalt des Raumes Y' zu studieren.

Wir definieren den Operator $L' \in \mathcal{L}(\mathsf{Y}', \mathsf{X}')$ gemäß

(5.1) $\qquad (p, Lu) =: (L'p, u) \qquad \forall p \in \mathsf{Y}',\ \forall u \in \mathsf{X}$

als zu L (vgl. (4.5)) adjungierten im Sinne der Antidualpaarung.

Lemma 5.1. Für den Operator L' gelten die Eigenschaften:

(i) $\quad L'p = \mathrm{grad}\, p$ für $p \in L^2(\mathbb{R}; V_p)$.

(ii) $\quad p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)\ (\subset \mathsf{Y}') \quad \Rightarrow \quad L'p \in L^2(\mathbb{R}; V'))$,

(iii) $\quad$ Falls $h \in \mathrm{Ran}\, L' \cap L^2(\mathbb{R}; V')$,
so existiert genau ein $p \in (\mathrm{Ker}\, L')^{\perp} \cap L^2(\mathbb{R}; H_p)$ mit $L'p = h$.

Beweis: (i), (ii) Diese Aussagen folgen aus der Definition des Operators L' und Standard-Abschätzungen.

(iii) Sei $h \in \operatorname{Ran} L' \cap L^2(\mathbb{R}; V')$. Wir bemerken, daß wegen Lemma 4.4. $\operatorname{Ran} L = \mathfrak{Y}$ und somit $\operatorname{Ran} L'$ abgeschlossen in $\mathfrak{X}'$ ist.

Wir betrachten die Operatorgleichung in $\mathfrak{X}'$

$$L'p = h,$$

was äquivalent ist zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \mid \mathfrak{F}\, u)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (p_1 \mid \operatorname{div} u)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (h(t), u(t))\, dt \quad \forall u \in \mathfrak{X}, \tag{5.2}$$

mit $p \in \mathfrak{Y}'$ mit $p = p_1 + p_2$, $p_1 \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$, $p_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p)$.

(Die letzte Klammer in (5.2) bedeutet die Antidualpaarung zwischen V' und V.)

Wir wollen zuerst zeigen, daß $\quad \operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \in L^2(\mathbb{R}; H)$.

Aus der Voraussetzung $p_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}; V_p)$ und den Eigenschaften der Fourier-Transformation folgt natürlich $\quad \operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$.

Aus (5.2) folgt durch Standard-Abschätzungen

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \mid \mathfrak{F}\, u)\, dt \right| \le c\, (\|p_1\| + \|h\|)\, \|\mathfrak{F}\, u\|_{\mathfrak{V}},$$

also ist $\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \mid \cdot\,)\, dt$ ein konjugiert-lineares stetiges Funktional auf $\mathfrak{V}$.

Nach den Darstellungssätzen existiert dann ein $g \in \mathfrak{V}$ $(= L^2(\mathbb{R}; V) = L^2(\mathbb{R}; H^1_0(\Omega; \mathbb{C}^n)))$ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 \mid u)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla g \mid \nabla u)\, dt \qquad \forall u \in \mathfrak{V}.$$

Aus dieser Beziehung folgt dann

$$\operatorname{grad} \mathfrak{F}\, p_2 = -\Delta g \in L^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^n)). \qquad \text{(im Distributionen-Sinn)}$$

Somit gilt dann auch

$$\operatorname{grad} p_2 \in L^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^n)),$$

woraus dann

$$p_2 \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$$

folgt (Vgl. [11]). Somit gilt die Behauptung.

Es soll nun darum gehen, mit möglichst schwachen Voraussetzungen an die rechten Seiten f, g und u_Γ Regularitätsresultate für u und p zu erhalten.
Insbesondere ist $p \in L^2(\mathbb{R}; H_p) \subset L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega; \mathbb{C}))$ dabei von besonderem Interesse.
Aus dem Lemma 4.6. ist ersichtlich, daß die rechten Seiten g, u_Γ unter den Bedingungen (4.19), (4.20) zu einem neuen $\tilde{f}$ aus $\mathbf{X}'$ führen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit setzen wir in der Folge g und u_Γ gleich null.

Die folgenden Resultate lassen sich, wenn g und u_Γ so „gut“ sind, daß $\tilde{f}$ den gestellten Anforderungen genügt.

Satz 5.2. Sei $(u, p) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}'$ schwache Lösung der Aufgabe (4.1) - (4.3) unter den Voraussetzungen $g = 0$, $u_\Gamma = 0$ sowie

(5.3) $$f = f_1 + f_2 \in L^2(\mathbb{R}; H) + H^1(\mathbb{R}; V').$$

Dann folgen $u \in H^1(\mathbb{R}; H)$ und $Bu = u'$ sowie

(5.4) $$p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$$

und anstelle von (4.21) gilt

(5.5) $$b(u, v) + a(u, v) - \int_{-\infty}^{+\infty} (p(t) \mid \operatorname{div} v(t))\, dt = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{X}.$$

Außerdem gelten die Abschätzungen

(5.6) $$\|u\|_{\mathbf{X}} \le 3\, \|f\|_{\mathbf{X}'} \le c\, \left(\|f_1\|_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + \|f_2\|_{H^1(\mathbb{R};\, V')} \right),$$

(5.7) $$\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} \le \|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + 4\, \|f_2\|_{H^1(\mathbb{R};\, V')}\, \|u\|_{L^2(\mathbb{R};\, V)},$$

(5.8) $$\|p\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} \le c\, \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, V)} + \|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + \|f_2\|^2_{H^1(\mathbb{R};\, V')} \right)$$

Beweis: Es gelten die Behauptungen des Satzes 4.7. Somit gelten (5.6) und die Variationsgleichung (4.21). Es ist leicht einzusehen, daß wir Satz 2.8. für die entsprechenden Räume mit "Divergenzfreiheit" anwenden dürfen, insbesondere ist $u \in H^1(\mathbb{R}; H)$ und es gilt die Abschätzung (2.43), also (5.7).
Somit folgt $Bu = u' \in L^2(\mathbb{R}; H)$ und es gilt

$$L'p = f - Bu - Au \in L^2(\mathbb{R}; V').$$

Lemma 5.1. (iii) garantiert dann $p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$ und aus (4.21) folgt (5.5).
Um die Abschätzung (5.8) zu erhalten, verfahren wir wie folgt:

Zu $p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$ existiert ein $w \in L^2(\mathbb{R}; V)$ mit $\operatorname{div} w(t) = p(t)$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$, dabei gilt offenbar die Abschätzung

(5.9) $$\|w\|_{L^2(\mathbb{R};\, V)} \le c\, \|p\|_{L^2(\mathbb{R};\, H_p)}.$$

Das Steklov-Mittel

$$w_k(t) := \tfrac{1}{k} \int_t^{t+k} w(s)\, ds \qquad t \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

der Funktion w ist eine zulässige Testfunktion in (5.5). Wir erhalten somit leicht

(5.10) $$(u' \mid w_k) + a(u, w_k) - \int_{-\infty}^{+\infty} (p(t) \mid p_k(t))\, dt = (f_1 \mid w_k) + \langle f_2, w_k \rangle.$$

Der Grenzübergang für $k \to 0$ in (5.10) ist korrekt und liefert die Beziehung

(5.11) $$\|p\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} = (u' \mid w) + a(u, w) - (f_1 \mid w) - \langle f_2, w \rangle.$$

Unter Beachtung von (5.6), (5.7) und (5.9) folgt hieraus die Behauptung (5.8).

Wir wollen untersuchen, wann eine schwache Lösung der Aufgabe (4.1) – (4.3) rell ist.

Satz 5.3. Es seien die Voraussetzungen des Satzes 5.2. gegeben. Außerdem gelte

(5.12) $$(f, v) = \overline{(f, v)}, \qquad \forall v \in X \text{ mit } v = \overline{v}.$$

Dann gilt für die nach Satz 5.2. existierende schwache Lösung (u, p) der Aufgabe (4.1) – (4.3)

(5.13) $$u = \overline{u}, \qquad p = \overline{p}.$$

Beweis: Für Testfunktionen $v \in X$ mit $\operatorname{div} v = 0$ ist sofort Lemma 2.5. anwendbar, und es folgt (5.13) für u.

Wir wählen in (5.5) v mit $v = \overline{v}$ und subtrahieren hiervon die komplexe Konjugation. Die Eigenschaften der Formen a und b (vgl. (2.22), (2.24)) und (5.12) führen zu

(5.14) $$\int_{-\infty}^{+\infty} (p(t) \mid \operatorname{div} v(t))\, dt \in \mathbb{R} \qquad \forall v \in X \text{ mit } v = \overline{v}.$$

Es ist klar, daß (5.14) auch für alle $v \in L^2(\mathbb{R}; V)$ gilt.

Sei nun $p(t) = r(t) + i\,q(t)$ mit r, q reell. Weil das verwendete Skalarprodukt mit der komplexen Konjugation verträglich ist (d.h., $(a \mid b) \in \mathbb{R}$ für a, b reell), so folgt

$$(5.15) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} (q(t) \mid \operatorname{div} v(t))\, dt = 0 \qquad \forall\, v \in L^2(\mathbb{R}; V) \text{ mit } v = \overline{v}.$$

Zu $q \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$ (H_p jetzt reell) existiert ein $v \in L^2(\mathbb{R}; V)$ mit $\operatorname{div} v(t) = q(t)$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$. Also folgt aus (5.15) $q(t) = 0$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$ und p ist reell.

Bemerkung 5.4. Wenn die rechten Seiten in (4.2), (4.3) nach Homogenisierung für (4.1) eine neue rechte Seite geben, die im Sinne von (5.12) reell ist, so ist die nach Satz 4.7. existierende schwache Lösung u (nach Lemma 2.5. für „divergenzfreie“ Räum) auch reell. Über den Druck p ist in dieser Allgemeinheit nur die Aussage möglich

$$(5.16) \qquad (p, Lv) \in \mathbb{R} \qquad \forall v \in \mathbf{X} \text{ mit } v = \overline{v}.$$

Erst die bessere Regularität von p führt von (5.16) zu (5.14) und zu einer direkten Aussage über p.

6. Aufgabe auf endlichem Zeitintervall

Wir wollen jetzt die bisher bereitgestellten Resultate auf die instationäre Stokes-Aufgabe über ein endliches Zeitintervall anwenden.

Hierzun ist es nötig, daß der Druck p aus $L^2(\mathbb{R}; H_p)$ ist, also keinen distributiven Anteil besitzt. Das ist nach Satz 5.2. möglich für ein besseres f als in Satz 4.7. Bei inhomogenen Werten für die Divergenz und auf dem Rand, müßten diese so sein, daß nach der Homogenisierung für das neue f die Bedingung (5.3) gilt.

Deshalb sei in diesem Punkt weiter aus Gründen der Übersichtlichkeit

$$(6.1) \qquad g = 0, \; u_\Gamma = 0.$$

Die bisherigen Bezeichnungen für die Räume gelten weiter.

Wir zitieren das folgende Lemma.

Lemma 6.1. (Kaplan [9]) Seien $u, v \in \mathbf{W}$ mit

$$u = 0 \text{ f.ü. für } t < t_0 \qquad \text{und} \qquad v = 0 \text{ f.ü. für } t > t_0 \quad (t_0 \in \mathbb{R} \text{ beliebig gewählt}).$$

Dann gilt für die in (2.6) definierte Form b

$$b(u, v) = 0.$$

Für spätere Zwecke spezialisieren wir den Satz 2.7. auf die Aufgabe (4.1) - (4.3).

Satz 6.2. Es sei (6.1) und für f gelte (5.3) mit

(6.2) $\qquad (f\,,v) = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{X} \text{ mit } \quad v(t) = 0 \qquad$ f.f.a. $t > 0$.

Dann gilt für die schwache Lösung (u, p) der Aufgabe (4.1) - (4.3)

(6.3) $\qquad u(t) = 0, \qquad p(t) = 0 \qquad$ f.f.a. $t < 0$.

Beweis: Für die "divergenzfreien" Varianten der beteiligten Räume ist Satz 2.7. anwendbar und wir erhalten die Behauptung für u.

Wir wählen nun in der Identität (5.5) $v \in \mathcal{X}$ mit $v(t) = 0$ f.f.a. $t > 0$. Dann gelten

$$a(u, v) = 0, \quad (f\,, v) = 0 \quad \text{ und nach Lemma 6.1.} \quad b(u, v) = 0.$$

Somit bleibt von (5.5)

(6.4) $\qquad -\int_{-\infty}^{0} (\, p(t) \mid \operatorname{div} v(t)\,)\, dt = 0 \qquad v \in \mathcal{X}$ mit $v(t) = 0$ f.f.a. $t > 0$.

Es ist klar, daß (6.4) auch für alle $v \in L^2(\mathbb{R}; V)$ gilt.

Zu $p \in L^2(\mathbb{R}; H_p)$ existiert ein $v \in L^2(\mathbb{R}; V)$ mit $\operatorname{div} v(t) = p(t)$ f.f.a. $t \in \mathbb{R}$. Also folgt aus (6.4) die Behauptung für p.

Wir benötigen weitere Hilbert-Räume

$$W := H^{\frac{1}{2}}(0, T; H) := \{u \in L^2(0, T; H) \mid \int_0^T \int_0^T \frac{|u(x) - u(y)|_H^2}{|x - y|^2}\, dydx < \infty\},$$

$$W_0 := H_0^{\frac{1}{2}}(0, T; H) := \{\, u \in H^{\frac{1}{2}}(0, T; H) \mid \int_0^T \frac{\|u(t)\|_H^2}{t}\, dt < \infty\,\},$$

$$W_T := H_T^{\frac{1}{2}}(0, T; H) := \{\, u \in H^{\frac{1}{2}}(0, T; H) \mid \int_0^T \frac{\|u(t)\|_H^2}{(T - t)}\, dt < \infty\,\},$$

versehen mit den Normen

$$\|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(0, T; H)} := \int_0^T |u(t)|_H^2\, dt + \int_0^T \int_0^T \frac{|u(x) - u(y)|_H^2}{|x - y|^2}\, dydx,$$

$$\|u\|^2_{H_0^{\frac{1}{2}}(0, T; H)} := \|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(0, T; H)} + \int_0^T \frac{\|u(t)\|_H^2}{t}\, dt,$$

$$\|u\|^2_{H_T^{\frac{1}{2}}(0, T; H)} := \|u\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(0, T; H)} + \int_0^T \frac{\|u(t)\|_H^2}{(T - t)}\, dt.$$

Es gilt folgendes Fortsetzungslemma [9].

Lemma 6.3. (i) $u \in W \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \tilde{u} \in \mathbf{W}: \quad u = \tilde{u}$ f.ü. in $(0, T)$;

Zu $u \in W$ kann die Fortsetzung $\tilde{u}$ so gewählt werden, daß

(6.5) $\qquad \Theta\, \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}} \le \|u\|_W \le \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}}, \qquad \operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset [-T, 2T]$

wobei Θ eine von u und $\tilde{u}$ unabhängige Konstante ist.

(ii) $u \in W_0$ (bzw. $u \in W_T$) $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \tilde{u} \in \mathbf{W}: \quad u = \tilde{u}$ f.ü. in $(0, T)$ und

$\tilde{u}(t) = 0$ für $t < 0$ (bzw. $\tilde{u}(t) = 0$ für $t > T$);

Zu $u \in W_0$ (bzw. $u \in W_T$) kann $\tilde{u}$ so gewählt werden, daß

(6.6) $\quad \eta\, \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}} \le \|u\|_{W_0} \le \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}}, \qquad$ (bzw. $\eta\, \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}} \le \|u\|_{W_T} \le \|\tilde{u}\|_{\mathbf{W}}$), $\operatorname{supp}(\tilde{u}) \subset [0, 2T]$

wobei η eine von u und $\tilde{u}$ unabhängige Konstante ist.

Das Lemma 6.1. rechtfertigt die folgende Definition, die benötigt wird, um die Form b der Aufgabe auf dem endlichen Intervall anzupassen.

Definition 6.4. Für beliebige $u \in W_0$, und $v \in W_T$, definieren wir

(6.7) $\qquad \tilde{b}(u, v) := b(\tilde{u}, \tilde{v}),$

wobei $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ beliebige Fortsetzungen von u und v gemäß Lemma 6.3. sind.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir nun die Aufgabe

(6.8) $\qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \operatorname{grad} p = f_1 + f_2 \qquad$ in $\Omega \times]0, T[$,

(6.9) $\qquad \operatorname{div} u = 0 \qquad$ in $\Omega \times]0, T[$,

(6.10) $\qquad u = 0 \qquad$ auf $\partial\Omega \times]0, T[$,

(6.11) $\qquad u = 0 \qquad$ in $\Omega \times \{0\}$.

Satz 6.5. Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und $T > 0$ sowie

(6.12) $\qquad f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)), \qquad f_2 \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n)) \qquad$ mit $f_2(0) = 0$.

Dann existiert genau eine schwache Lösung

(6.13) $(u, p) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap W_0(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)) \times L^2(0, T; L^2(\Omega))$

der Rand-Anfangswert-Aufgabe (6.8) - (6.11) mit

(6.14) $\int_\Omega p(x, t)\, dx = 0$ f.f.a. $t \in]0, T[$

sowie

(6.15) $$-\int_0^T \int_\Omega u(x, t)\, \varphi'(x, t)\, dxdt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u(x, t)\, \nabla\varphi(x, t)\, dxdt - \int_0^T \int_\Omega p(x, t)\, \mathrm{div}\varphi(x, t)\, dxdt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f_1(x, t)\, \varphi(x, t)\, dx\, dt + \int_0^T <f_2(t)\, , \varphi(t)>\, dt$$

$\forall\ \varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ mit $\varphi(T) = 0$.

Für den Druck p gilt die Abschätzung

(6.16) $$\|p\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq c\, (\|u\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega; \mathbb{R}^n))} + \|f_1\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))} + $$
$$+ \|f_2\|_{H^1(0, T; H^{-1}(\Omega; \mathbb{R}^n))}).$$

Außerdem gelten für u folgende weitere Aussagen

(6.17) $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$,

(6.18) $\|u\|^2_{L^2(0, T; V)} + \|u\|^2_{W_0(0, T; H)} \leq c\, (\|f_1\|^2_{L^2(0, T; H)} + \|f_2\|^2_{H^1(0, T; V')})$,

(6.19) $\|u'\|^2_{L^2(0, T; H)} \leq c(\|f_1\|^2_{L^2(0, T; H)} + 4\, \|f_2\|_{H^1(0, T; V')}\, \|u\|_{L^2(0, T; V)})$,

Beweis: Wir setzen die Aufgabe geeignet auf ganz $\mathbb{R}$ fort, um den Satz 5.2. anwenden zu können.

Aus (6.12) folgt

$f_1 \in L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{C}^n))$

und f_2 kann ohne Vergrößerung der Norm zu

$f_2 \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^n))$ mit $f_2(0) = 0$

fortgesetzt werden. Die Funktion f_1 kann in ihrer Klasse durch null auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Für $t < 0$ kann f_2 ebenfalls durch null fortgesetzt werden. Für $t > T$ können wir f_2 so in $H^1(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega; \mathbb{C}^n))$ fortsetzen, daß die Norm nicht mehr als verdoppelt wird. Wir behalten die alten Bezeichnungen bei. Durch

(6.20) $$(F\, , v) := \int_0^T (f_1(t) \mid \varphi(t))\, dt + \int_0^\infty <f_2(t)\, , \varphi(t)>\, dt$$

wird offenbar ein Element $F \in \mathcal{X}'$ definiert.

Wir betrachten nun die Aufgabe (auf ganz $\mathbb{R}$):

$$(6.21)\qquad b(\tilde u, v) + a(\tilde u, v) + (\tilde p\,, Lv) = (F\,, v) \qquad \forall\, v\in \mathbf{X},$$

$$(6.22)\qquad \operatorname{div} \tilde u = 0 \qquad \text{f.ü. in } \Omega\times\mathbb{R}.$$

Nach dem Satz 5.2. existiert genau eine schwache Lösung $(\tilde u, \tilde p)\in \mathbf{X}\times\mathbf{Y}'$ zu (6.21), (6.22) mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$(6.23)\qquad \tilde u\in H^1(\mathbb{R}; H),$$

$$(6.24)\qquad \tilde p\in L^2(\mathbb{R}; H_p),$$

$$(6.25)\qquad b(\tilde u, v) + a(\tilde u, v) - \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde p(t) \mid \operatorname{div} v(t))\, dt = (F\,, v) \quad \forall v\in \mathbf{X}.$$

Überdies gelten nach Satz 5.2. auch die Abschätzungen

$$(6.26)\qquad \|\tilde u\|_{\mathbf{X}} \le c\,(\, \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + \|f_2\|_{H^1(\mathbb{R};\, V')}\,),$$

$$(6.27)\qquad \|\tilde u'\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} \le c(\, \|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + 4\, \|f_2\|_{H^1(\mathbb{R};\, V')}\, \|\tilde u\|_{L^2(\mathbb{R};\, V)}\,),$$

$$(6.28)\qquad \|\tilde p\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} \le c\,(\, \|\tilde u\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, V)} + \|f_1\|^2_{L^2(\mathbb{R};\, H)} + \|f_2\|^2_{H^1(\mathbb{R};\, V')}\,).$$

Nach Satz 6.2. gelten offenbar

$$\tilde u(t) = 0, \qquad \tilde p(t) = 0 \qquad \text{f.f.a. } t < 0,$$

da F die Voraussetzung (6.2) erfüllt. Ebenso erfüllt F nach Konstruktion die Bedingung (5.12), und nach Satz 5.3. sind $\tilde u$ und $\tilde p$ reell.

Sei $\varphi\in W_T\cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega; \mathbb{C}^n))$ und v eine Fortsetzung von φ auf $\mathbb{R}$ gemäß Lemma 6.3., die für $t > T$ verschwindet.

Wir testen (6.25) mit diesem v und bezeichnen die Einschränkungen von $\tilde u$ und $\tilde p$ auf $]0, T[$ mit u bzw. p. Es folgt somit unter Beachtung von Definition 6.2.

$$\tilde b(u, \varphi) + \int_0^T ((\, u(t) \mid \varphi(t)\,))\, dt - \int_0^T (\, p(t) \mid \operatorname{div} \varphi(t)\,)\, dxdt =$$

$$(6.29)\qquad = \int_0^T (\, f_1(t) \mid \varphi(t)\,)\, dt + \int_0^T < f_2(t)\,, \varphi(t) > dt$$

$$\forall\, \varphi\in W_T\cap L^2(0, T; H^1_0(\Omega;\mathbb{C}^n)).$$

Mit Standard-Argumenten läßt sich die Einzigkeit von u und damit auch von p zeigen. (Die Fortsetzung von f_2 für $t > T$ war nicht eindeutig.)

Wählen wir in (6.29) $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^n))$ mit $\varphi(T) = 0$, so

folgt unter Beachtung der Eigenschaften der Form $\tilde{b}$ die Behauptung (6.15)
Die übrigen Behauptungen folgen ebenfalls mit Hilfe von Standardargumenten.

Bemerkungen 6.6. (i) Für unsere Ergebnisse ist ausreichend, daß Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist. Daher ist es möglich, mit leichten Modifikationen auch Randwerte gemischten Typs zu betrachten und ähnliche Ergebnisse zu erzielen. Solche Randwerte treten bei Aufgaben mit teilweise freiem Rand auf (vgl. z.B. [15]).
(ii) Eine Anwendung der hier vorgestellte Einführung des Drucks auf die instationäre (nichtlineare) Navier-Stokes-Aufgabe verlangt, daß vorher durch den Konvektionsterm eine geeignete zusätzliche rechte Seite zu erzeugen ist. Schon im Falle von zwei Raumdimensionen stößt dieses Vorhaben auf größere Schwierigkeiten.

Literatur

[1] BRENNER, S.C.; SCOTT, L.R.: "The Mathematical Theory of Finite Element Methods" - Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).

[2] CHELKAK, S.; KOSHELEV, A.: "About the regularity of solutions of the nonstatinary Navier-Stokes system" - Math. Nachr. 177, 41 - 55 (1996)

[3] Constantin, P.; Foias, C.: „Navier-Stokes equations“ The University of Chicago Press, Chicago, (1988).

[4] DEURING, P.; WAHL, W. VON: "Strong solution of the Navier-Stokes system on Lipschitz bounded domains" - Math. Nachr. 171, 111 - 148 (1995).

[5] FARWIG, R.: "Partial regularity and weighted energy estimates of global weak solutions of the Navier-Stokes system" - in CHIPOT, M. (ed.) et al.: Progress in partial differential equations: The Metz surveys of the 4. Proceedings of the conference given at the University of Metz, France.

Pitman Res. Notes Math. Ser. 345, 205 -215 (1996)

[6] GALDI, G. P.: "An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, vol. I, II" - Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).

[7] GIAQUINTA, M.; MODICA, G.: Nonlinear systems of the type of the stationary Navier-Stokes systems. - J. reine angew. Math. 330 (1982), 173 - 214.

[8] HÖRMANDER, L.: "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I" - Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1983).

[9] KAPLAN, S.: "Abstract boundary value problems for linear parabolic equations" - Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (3) 20 (1966), 395 - 419.

[10] Koch, H; Solonnikov, V. A.: „L_p- Abschätzungen der Lösung für die instationäre Stokes-Aufgabe“ (in Russisch) - erscheint in: Problemy Mat. Analisa, (2001)

[11] NEČAS, J.: "Equations aux dérivées partielles" - Presses de l'Université de Montréal, (1965).

[12] TAYLOR, M.: „Partiell differential equations“ Bd. 1 - 3, Springer-Verlag, (1996, 1997).

[13] TEMAM, R.: "Navier-Stokes Equations - theory and numerical analysis" - North-Holland Amsterdam, New York, (1979).

[14] v. Wahl, W.: „The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations“ – Vieweg – Verlag, Braunschweig / Wiesbaden, (1985).

[15] Wolff, M.: „A global L^κ-gradient estimate on weak solutions to nonlinear stationary Navier-Stokes equations under mixed boundary conditions“ – Preprint Nr. 96-3 der Humboldt-Universität Berlin, (1996).

Berichte aus der Technomathematik ISSN 1435-7968

http://www.math.uni-bremen.de/zetem/berichte.html

— Vertrieb durch den Autor —

Reports **Stand: 25. Juli 2001**

98–01. Peter Benner, Heike Faßbender:
An Implicitly Restarted Symplectic Lanczos Method for the Symplectic Eigenvalue Problem, Juli 1998.

98–02. Heike Faßbender:
Sliding Window Schemes for Discrete Least-Squares Approximation by Trigonometric Polynomials, Juli 1998.

98–03. Peter Benner, Maribel Castillo, Enrique S. Quintana-Ortí:
Parallel Partial Stabilizing Algorithms for Large Linear Control Systems, Juli 1998.

98–04. Peter Benner:
Computational Methods for Linear–Quadratic Optimization, August 1998.

98–05. Peter Benner, Ralph Byers, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Solving Algebraic Riccati Equations on Parallel Computers Using Newton's Method with Exact Line Search, August 1998.

98–06. Lars Grüne, Fabian Wirth:
On the rate of convergence of infinite horizon discounted optimal value functions, November 1998.

98–07. Peter Benner, Volker Mehrmann, Hongguo Xu:
A Note on the Numerical Solution of Complex Hamiltonian and Skew-Hamiltonian Eigenvalue Problems, November 1998.

98–08. Eberhard Bänsch, Burkhard Höhn:
Numerical simulation of a silicon floating zone with a free capillary surface, Dezember 1998.

99–01. Heike Faßbender:
The Parameterized SR Algorithm for Symplectic (Butterfly) Matrices, Februar 1999.

99–02. Heike Faßbender:
Error Analysis of the symplectic Lanczos Method for the symplectic Eigenvalue Problem, März 1999.

99–03. Eberhard Bänsch, Alfred Schmidt:
Simulation of dendritic crystal growth with thermal convection, März 1999.

99–04. Eberhard Bänsch:
Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface, März 1999.

99–05. Peter Benner:
Mathematik in der Berufspraxis, Juli 1999.

99–06. Andrew D.B. Paice, Fabian R. Wirth:
Robustness of nonlinear systems and their domains of attraction, August 1999.

99–07. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Balanced Truncation Model Reduction of Large-Scale Dense Systems on Parallel Computers, September 1999.

99–08. Ronald Stöver:
Collocation methods for solving linear differential-algebraic boundary value problems, September 1999.

99–09. Huseyin Akcay:
Modelling with Orthonormal Basis Functions, September 1999.

99–10. Heike Faßbender, D. Steven Mackey, Niloufer Mackey:
Hamilton and Jacobi come full circle: Jacobi algorithms for structured Hamiltonian eigenproblems, Oktober 1999.

99–11. Peter Benner, Vincente Hernández, Antonio Pastor:
On the Kleinman Iteration for Nonstabilizable System, Oktober 1999.

99–12. Peter Benner, Heike Faßbender:
A Hybrid Method for the Numerical Solution of Discrete-Time Algebraic Riccati Equations, November 1999.

99–13. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Numerical Solution of Schur Stable Linear Matrix Equations on Multicomputers, November 1999.

99–14. Eberhard Bänsch, Karol Mikula:
Adaptivity in 3D Image Processing, Dezember 1999.

00–01. Peter Benner, Volker Mehrmann, Hongguo Xu:
Perturbation Analysis for the Eigenvalue Problem of a Formal Product of Matrices, Januar 2000.

00–02. Ziping Huang:
Finite Element Method for Mixed Problems with Penalty, Januar 2000.

00–03. Gianfrancesco Martinico:
Recursive mesh refinement in 3D, Februar 2000.

00–04. Eberhard Bänsch, Christoph Egbers, Oliver Meincke, Nicoleta Scurtu:
Taylor-Couette System with Asymmetric Boundary Conditions, Februar 2000.

00–05. Peter Benner:
Symplectic Balancing of Hamiltonian Matrices, Februar 2000.

00–06. Fabio Camilli, Lars Grüne, Fabian Wirth:
A regularization of Zubov's equation for robust domains of attraction, März 2000.

00–07. Michael Wolff, Eberhard Bänsch, Michael Böhm, Dominic Davis:
Modellierung der Abkühlung von Stahlbrammen, März 2000.

00–08. Stephan Dahlke, Peter Maaß, Gerd Teschke:
Interpolating Scaling Functions with Duals, April 2000.

00–09. Jochen Behrens, Fabian Wirth:
A globalization procedure for locally stabilizing controllers, Mai 2000.

00–10. Peter Maaß, Gerd Teschke, Werner Willmann, Günter Wollmann:
Detection and Classification of Material Attributes – A Practical Application of Wavelet Analysis, Mai 2000.

00–11. Stefan Boschert, Alfred Schmidt, Kunibert G. Siebert, Eberhard Bänsch, Klaus-Werner Benz, Gerhard Dziuk, Thomas Kaiser:
Simulation of Industrial Crystal Growth by the Vertical Bridgman Method, Mai 2000.

00–12. Volker Lehmann, Gerd Teschke:
Wavelet Based Methods for Improved Wind Profiler Signal Processing, Mai 2000.

00–13. Stephan Dahlke, Peter Maass:
A Note on Interpolating Scaling Functions, August 2000.

00–14. Ronny Ramlau, Rolf Clackdoyle, Frédéric Noo, Girish Bal:
Accurate Attenuation Correction in SPECT Imaging using Optimization of Bilinear Functions and Assuming an Unknown Spatially-Varying Attenuation Distribution, September 2000.

00–15. Peter Kunkel, Ronald Stöver:
Symmetric collocation methods for linear differential-algebraic boundary value problems, September 2000.

00–16. Fabian Wirth:
The generalized spectral radius and extremal norms, Oktober 2000.

00–17. Frank Stenger, Ahmad Reza Naghsh-Nilchi, Jenny Niebsch, Ronny Ramlau:
A unified approach to the approximate solution of PDE, November 2000.

00–18. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Parallel algorithms for model reduction of discrete–time systems, Dezember 2000.

00–19. Ronny Ramlau:
A steepest descent algorithm for the global minimization of Tikhonov–Phillips functional, Dezember 2000.

01–01. Efficient methods in hyperthermia treatment planning:
Torsten Köhler, Peter Maass, Peter Wust, Martin Seebass, Januar 2001.

01–02. Parallel Algorithms for LQ Optimal Control of Discrete-Time Periodic Linear Systems:
Peter Benner, Ralph Byers, Rafael Mayo, Enrique S. Quintana-Ortí, Vicente Hernández, Februar 2001.

01–03. Peter Benner, Enrique S. Quintana-Ortí, Gregorio Quintana-Ortí:
Efficient Numerical Algorithms for Balanced Stochastic Truncation, März 2001.

01–04. Peter Benner, Maribel Castillo, Enrique S. Quintana-Ortí:
Partial Stabilization of Large-Scale Discrete-Time Linear Control Systems, März 2001.

01–05. Stephan Dahlke:
Besov Regularity for Edge Singularities in Polyhedral Domains, Mai 2001.

01–06. Fabian Wirth:
A linearization principle for robustness with respect to time-varying perturbations, Mai 2001.

01–07. Stephan Dahlke, Wolfgang Dahmen, Karsten Urban:
Adaptive Wavelet Methods for Saddle Point Problems - Optimal Convergence Rates, Juli 2001.

01–08. Ronny Ramlau:
Morozov's Discrepancy Principle for Tikhonov regularization of nonlinear operators, Juli 2001.

01–09. Michael Wolff:
Einführung des Drucks für die instationären Stokes–Gleichungen mittels der Methode von Kaplan, Juli 2001.